

# Análisis Matemático I

Teo. El espacio  $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$  es completo.

Lema. Sea  $(\bar{x}_n)_n$  una sucesión en  $l^\infty$ . Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_n = x \in l^\infty$  entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{nr} = x_r$  para toda  $r \geq 1$ .

Notación: Sea  $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$

$$\bar{x}_n = (x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, \dots, x_{ni}, \dots)$$

Lo que el lema afirma es lo siguiente:

$$\bar{x}_1 = (x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots)$$

$$\bar{x}_2 = (x_{21}, x_{22}, x_{23}, \dots)$$

$$\bar{x}_3 = (x_{31}, x_{32}, x_{33}, \dots)$$

$\vdots$

$$\bar{x}_n = (x_{n1}, x_{n2}, \dots)$$



si la sucesión converge en  $l^\infty$ ,

x

entonces cada una de las sucesiones formadas por las columnas convergen en  $\mathbb{R}$ .

$$x_{11} \in \mathbb{R}$$

$$x_{22} \in \mathbb{R}$$

$$x_{33} \in \mathbb{R} \dots$$

La demostración es inmediata:

$$0 \leq |x_{nr} - x_r| \leq \|\bar{x}_n - x\|_\infty = \sup_{r \geq 1} \{|x_{nr} - x_r|\}.$$

Obs. El resultado converso del lema no es cierto en general:

$$\bar{x}_1 = (0, 0, 0, 0, \dots)$$

$$\bar{x}_2 = (1, 0, 0, 0, \dots)$$

$$\bar{x}_3 = (1, 1, 0, 0, \dots)$$

$\vdots$

$$\bar{x}_n = (1, 1, 1, \dots, 1, 0, 0, 0, \dots)$$

$$\bar{x} = (1, 1, 1, \dots, 1, 1, 1, \dots)$$

Se tiene que cada una de las "columnas" converge

y sin embargo

$$\|\bar{x}_n - (1, 1, 1, \dots)\|_\infty = 1$$

$$\text{ie } \bar{x}_n \not\rightarrow \bar{x}.$$

NO \_\_\_\_\_  
DATE \_\_\_\_\_

**Demostración del teorema:** Sea  $(\bar{x}_n)_n$  una sucesión de Cauchy en  $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ .

p.d. existe  $\bar{x} \in \ell^\infty$  tq  $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_n = \bar{x}$ .

Sea  $\varepsilon > 0$ , existe  $N > 0$  tal que  $\|\bar{x}_n - \bar{x}_m\|_\infty < \varepsilon$  si  $n, m \geq N$

es decir,  $\sup_{r \geq 1} |x_{nr} - x_{mr}| < \varepsilon$  si  $n, m \geq N$ .

Entonces se tiene que  $|x_{nr} - x_{mr}| < \varepsilon$  si  $n, m \geq N$   $\forall r$ .

Sean  $n \geq N$  fija y  $r$  fija también:

$$|x_{nr} - x_{mr}| < \varepsilon \text{ si } n \geq N$$

y si  $m$  tiende a  $\infty$ , entonces

$$|x_{nr} - x_r| \leq \varepsilon \text{ si } n \geq N \text{ para cada } r \geq 1.$$

$$\text{Ahora, } \sup_{r \geq 1} |x_{nr} - x_r| \leq \varepsilon \text{ si } n \geq N.$$

$$\text{Por tanto } \|\bar{x}_n - \bar{x}\|_\infty = \sup_{r \geq 1} |x_{nr} - x_r| \leq \varepsilon \text{ si } n \geq N$$

es decir,  $\bar{x}_n \rightarrow \bar{x}$  en  $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$  y por

tanto el espacio es completo.