

## Tarea 2

Entrega: 19 de octubre de 2018.

1. A partir de los axiomas de Peano pruebe que

- (a) la suma definida en  $\mathbb{N}$  es conmutativa,
- (b) el producto definido en  $\mathbb{N}$  es asociativo.

2. Pruebe que  $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n + 1)$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ .3. Pruebe que  $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ .4. Pruebe que para cualesquiera  $a, b, n \in \mathbb{N}$  se tiene que

$$a + ab + ab^2 + ab^3 + \cdots + ab^n = \frac{a(b^{n+1} - 1)}{b - 1}.$$

5. Sea  $f_n$  en  $n$ -ésimo número de Fibonacci. Pruebe que  $f_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}$ .6. Se dice que un conjunto  $M$  de números está acotado si existe un número  $c$  tal que  $|x| \leq c$  para toda  $x \in M$ .

- (a) Pruebe que el conjunto de números enteros no está bien ordenado.
- (b) Pruebe que cualquier subconjunto acotado de los números enteros está bien ordenado.
- (c) Pruebe que los racionales no están bien ordenados.
- (d) Pruebe que existen subconjuntos acotados de los racionales que no están bien ordenados.

7. Utilice el principio del buen orden para demostrar que todo subconjunto finito no vacío de números naturales tiene un elemento máximo.

8. Sea  $S$  un conjunto con  $n$  elementos. Pruebe que el conjunto potencia de  $S$  tiene  $2^n$  elementos.9. Pruebe que para cualesquiera  $m, n \in \mathbb{N}$  se cumple que  $n < n + m$ .10. Pruebe que para cualesquiera  $k, m, n \in \mathbb{N}$  se cumple que si  $n \cdot k < m \cdot k$ , entonces  $n < m$ .

11. Determine el número de enteros positivos menores que 1000 que contienen por lo menos un 1.

12. ¿Cuántos triángulos equiláteros distintos se pueden formar con los vértices de un cubo?

13. Una bolsa tiene 50 canicas rojas y 50 canicas azules. Se sacan al azar 10 canicas de la bolsa. ¿Cuál es la probabilidad de que en las canicas sacadas haya 5 canicas rojas y 5 canicas azules?
14. (a) Si hay  $n$  personas en un salón ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos dos de ellas cumplan años el mismo día?
- (b) ¿Qué tan grande tiene que ser  $n$  para que la probabilidad sea por lo menos  $\frac{1}{2}$  en el inciso anterior?
15. Pruebe que  $\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} = 1$  cuando  $n$  es un entero positivo.
16. Desarrolle  $(x^2 + x^{-1})^{12}$ .