Cálculo diferencial e integral 3

Guía 1

1. Sean $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$. Demuestra que el conjunto

$$W = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \right\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

2. Sean W y V subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$. Demuestra que $W \cap V$ es no vacío y también es un subespacio vectorial.

3. Demuestra que los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_k$ son linealmente dependientes si y sólo si existen escalares $a_1, \ldots, a_k$ tales que $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_k v_k = 0$ y al menos un a_i es distinto de cero.

4. En cada caso, verifica si la familia de vectores dada es linealmente dependiente o no. Justifica tu respuesta.

   a) $(1, 0)$ y $(1, 1)$.
   b) $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 1)$.
   c) $(1, 1, 0)$, $(1, 2, 1)$, $(0, 1, 1)$.
   d) $(1, 1, 1, 0)$, $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$.
   e) $(1, 1, 1, 1)$, $(1, 1, 1, 0)$, $(1, 1, 0, 0)$, $(1, 0, 0, 0)$.

5. Demuestra las siguientes identidades utilizando únicamente las propiedades de producto interior:

   a) $\|u + v\|^2 = u^2 + 2u \cdot v + v^2$.
   b) $\|u - v\|^2 = u^2 - 2u \cdot v + v^2$.

6. Encontrar la proyección ortogonal de los siguientes vectores:

   a) $(-1, 1, 1)$ sobre $(2, 1, -3)$.
   b) $(2, 1, -3)$ sobre $(-1, 1, 1)$.

7. **E1.** Considera el plano dado por la ecuación $x + y + z = 0$. Encuentra un vector w en dicho plano, tal que $w - v$ sea ortogonal a w, siendo $v = (1, 1, 1)$.

8. **E1.** Considera $\mathbb{R}^3$ con la norma ecuclidiana. Encuentra la longitud de los lados y el coseno de los ángulos internos de los triángulos determinados por los vétices:

   a) $(2,-1,1)$, $(1,-3,-5)$, $(3,-4,-4)$.
   b) $(3,1,1)$, $(-1,2,1)$, $(2,-2,5)$.

9. Sea $t > 0$ y $u \in \mathbb{R}^n$ un vector unitario (es decir, $\|u\| = 1$). Describe los siguientes subconjuntos:

   a) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x \cdot u = t\}$,
   b) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x \cdot u \leq t\}$,
   c) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x \cdot u \geq t\}$.

10. **E1.** Demuestra que la siguiente función $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 4x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$$

    es un producto interno en $\mathbb{R}^2$.

11. **E1.** Sea $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Demuestra que:

$$\text{máx}\{|x_1|, \ldots |x_n|\} \leq \|x\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

    Interpreta geométricamente.

12. **E1.** Sean f y g dos funciones continuas en el intervalo $[0,1]$. Demuestra que

$$\left| \int_0^1 f(x)g(x)dx \right| \leq \left(\int_0^1 f(x)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 g(x)^2 dx \right)^{1/2}.$$

    Sugerencia: Demuestralo primero para el caso $g = \alpha f$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Luego hazlo para el caso contrario siguiendo la demostración de la desigualdad de Cauchy-Schwarz vista en clase.

13. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$. Demuestra que x y y son ortogonales si y sólo si

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

14. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $z, w \in \mathbb{R}^m$. Observa que los puntos (x, z) y (y, w) se pueden ver como puntos en $\mathbb{R}^{n+m}$. Demuestra que:

a) $(x,z)\cdot(y,w) = x\cdot y + z\cdot w$,

b) $\|(x,z)\| = \sqrt{\|x\|^2 + \|z\|^2}$.

15. **E1.** Sea $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un producto interno en $\mathbb{R}^n$. Define $|||x||| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

    a) Demuestra que $|||\cdot|||$ es una norma.

    b) Demuestra que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ y $|||\cdot|||$ satisfacen la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Es decir,
    $$|\langle x, y\rangle| \leq |||x||| \cdot |||y|||.$$

    c) Demuestra que dicha norma satisface la ley del paralelogramo y la identidad de polarización.

16. **E2.** Sea $|||\cdot|||$ una norma en $\mathbb{R}^n$ la cual satisface la identidad del paralelogramo. Demuestra que dicha norma está definida por un producto interno. Es decir, existe un producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ en $\mathbb{R}^n$ tal que $|||x||| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

17. Dibujar los siguientes conjuntos:

    a) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 |\ |x| + |y| = 1\}$

    b) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 |\ |x| + |y| \leq 2\}$

    c) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 |\ \text{máx}\{|x|,|y|\} = 1\}$

    d) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 |\ \text{máx}\{|x|,|y|\} \geq 3\}$

    e) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 |\ \text{máx}\{|x|,|y|,|z|\} \leq 1\}$

    f) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x \geq 0, y \leq x\}$

18. Para cada $n\in\mathbb{N}$, considera el cubo unitario de dimensión n, $\mathbb{I}^n = [-1,1]^n \subset \mathbb{N}$.

    a) ¿Cuántos vértices tiene $\mathbb{I}^n$?

    b) Escribe las coordenadas de todos los vértices de $\mathbb{I}^4$.

    c) El cubo de dimensión 3 tiene 8 vértices (o caras de dimensión 0), 12 aristas (o caras de dimensión 1) y 6 caras (caras de dimensión 2). De manera similar, el cubo de dimensión 4 tendrá vértices, aristas, caras de dimensión 2 y caras de dimensión 3. Escribe el conjunto de vértices que determinan cada una de las aristas, cada una de las caras de dimensión 2 y cada una de las caras de dimensión 3 de $\mathbb{I}^4$.

19. *a*) Encuentra el radio r_1 de la bola inscrita en $\mathbb{I}^n$ y el radio r_2 de la bola circunscrita en $\mathbb{I}^n$.

    b) Si C es un cubo cualquiera de dimensión n y lado a, encuentra el radio de la bola inscrita en C y el radio de la bola que cirscunscribe a C.

    c) Sea B una bola cualquiera en $\mathbb{R}^n$. Encuentra el lado del cubo de dimensión n inscrito en B y el lado del cubo de dimensión n que circunscribe a B.

    d) Si R es un rectángulo arbitrario de dimensión n, demuestra que siempre existe una bola contenida dentro de R y una bola que contiene a R.

20. **E2.** ¿Cuáles de las siguientes funciones son métricas para $\mathbb{R}$?

    a) $d(x, y) = (x - y)^2$,

    b) $d(x, y) = \sqrt{|x - y|}$,

    c) $d(x, y) = |x^2 - y^2|$,

    d) $d(x, y) = ||x| - |y||$.

21. Considera el intervalo $[0, 1)$ y la función $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ dada por

    $$\rho(x, y) = \text{mín}\{|x - y|, 1 - |x - y|\}.$$

    Demuestra que ρ es una métrica en $[0, 1)$. Interpreta geométricamente.

22. Supón que d_1 y d_2 son métrica en $\mathbb{R}$. Demuestra que las siguientes son métricas en $\mathbb{R}^2$:

    a) $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \text{máx}\{d_1(x_1, x_2), d_2(y_1, y_2)\}$

    b) $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_1(x_1, x_2) + d_2(y_1, y_2)$

    c) $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{\{d_1(x_1, x_2)^2 + d_2(y_1, y_2)^2}$

23. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, una transformación lineal.

    a) Demuestra que T preserva el producto interior si y sólo si T preserva la norma.

    b) Si T preserva el producto interior demuestra que T es inyectiva.

    c) Si T preserva el producto interior, entonces T preserva ángulos.

    d) Muestra con un ejemplo que el recíproco del inciso anterior es falso.

24. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal. Supogamos que existen números $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tales que $T(e_i) = \lambda_i e_i$. Demuestra que T preserva ángulos si y sólo si todos los λ_i son iguales.

25. **E2.**

    a) Demuestra que si T es una transformación lineal y T^{-1} es su inversa, entonces T^{-1} también es lineal.

    b) $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal. Demuestra que T es inyectiva si y sólo si T es suprayectiva.

26. Una función $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es afín si $F(tx + (1-t)y) = tF(x) + (1-t)F(y)$ para todo $t \in [0,1]$.

    a) Demuestra que una función $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es afín si y sólo si existe $u \in \mathbb{R}^m$ y $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineal tal que $F(x) = u + T(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

    b) Demuestra que F es afín si y sólo si $F(V)$ es convexo para todo convexo $V \subset \mathbb{R}^n$.

27. **E2.** Supongamos que $\|\cdot\|_*$ y $\|\cdot\|_\odot$ son normas en $\mathbb{R}^n$. Diremos que la norma $\|\cdot\|_*$ es equivalente a la norma $\|\cdot\|_\odot$ (y lo denotaremos por $\|\cdot\|_* \sim \|\cdot\|_\odot$), si existen $m > 0$ y $M > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se cumple la siguiente desigualdad:

$$m\|x\|_* \leq \|x\|_\odot \leq M\|x\|_*.$$

    a) Demuestra que $\sim$ es una relación de equivalencia.

    b) Demuestra que $\|\cdot\|_2 \sim \|\cdot\|_\infty \sim \|\cdot\|_1$.

    c) Interpreta geométricamente.

28. *a*) Sean k y l dos enteros positivos, $\{a_{ij} | 1 \leq i \leq k, 1 \quad \leq j \leq l\}$ un conjunto de números postivos. Demuestra que si $q \geq p > 0$, entonces

$$\left(\sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{i=1}^{k} a_{ij}^p\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{l} a_{ij}^q\right)^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

    Sugerencia: Usa la desigualdad de Hölder.

    b) Usa el inciso anterior para demostrar que si p y q son mayores que 1, entonces $\|\cdot\|_p \sim \|\cdot\|_q$.

c) Demuestra que $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$ e interpreta geométricamente.

29. a) Sean a y b números positvos tales que $a+b=1$. Demuestra que

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

b) Sean a, b y c números positvos tales que $a+b+c=1$. Demuestra que

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2 \geq \frac{100}{3}.$$

30. Dibujar (argumentando) la gráfica y la traza de cada una de las siguientes curvas:

a) $f(t)=(\operatorname{sen} t, 4\cos t)$, $0\leq t\leq 2\pi$.
b) $f(t)=(2\operatorname{sen} t, 4\cos t)$, $0\leq t\leq 2\pi$.
c) $f(t)=(1-t, t+2)$, $-2\leq t\leq 2$

31. Dibujar (argumentando) la traza de cada una de las siguientes curvas:

a) $f(t)=(2t-1, t+2, t)$, $0\leq t\leq 2$.
b) **E2.** $f(t)=(-t, 2t, 1/t)$, $1\leq t\leq 3$.
c) $f(t)=(e^t, \cos t)$.
d) **E2.** $f(t)=(e^{2t}, e^t)$, $t\in\mathbb{R}$.
e) **E2.** $f(t)=(\operatorname{sen}^2 t, \operatorname{sen} t)$, $t\in\mathbb{R}$.
f) $f(t)=(t^4, t^2)$, $t\in\mathbb{R}$.

32. Dibujar las curvas de nivel y las gráficas de cada una de las siguientes funciones:

a) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, dada por $f(x,y)=x-y+2$
b) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, dada por $f(x,y)=3x-7y$.
c) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, dada por $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+9}$.
d) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, dada por $f(x,y)=x^2+4y^2$.
e) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, dada por $f(x,y)=-xy$.
f) **E2.** $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, dada por $f(x,y)=1-x^2-y^2$.

g) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $f(x,y) = |y|$.

h) **E2.** $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $f(x,y) = \text{máx}\{|x|, |y|\}$.

i) **E2.** $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $f(x,y) = x/y$.

j) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $f(x,y) = x^2 + xy$.

33. Dibuja algunas de las superficies de nivel de cada una de las siguientes funciones:

    a) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por $f(x,y,z) = -x^2 - y^2 - z^2$.

    b) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por $f(x,y,z) = 4x^2 + y^2 + 9z^2$.

    c) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por $f(x,y,z) = xy$.

34. Los siguientes puntos vienen dados en coordenadas cilíndricas. Expresar cada uno en coordenadas cartesianas y esféricas: $(1, \pi/4, 1)$, $(2, \pi/2, -4)$, $(0, \pi/3, 10)$, $(3, \pi/6, 4)$, $(1, 2\pi/3, 0)$, $(2, 3\pi/4, -2)$.

35. Los siguientes puntos están dados en coordenadas cartesianas. Expresar cada uno de ellos en coordenadas cilíndricas y esféricas:
    $(2, -1, -2)$, $(0, 3, 4)$, $(\sqrt{2}, 1, 1)$, $(-2\sqrt{3}, -2, 3)$.

36. Describir el significado geométrico de cada una de las siguientes aplicaciones en coordenadas cilíndricas:

    a) $(r, \theta, z) \longrightarrow (r, \theta, -z)$,

    b) $(r, \theta, z) \longrightarrow (r, \theta + \pi, -z)$,

    c) $(r, \theta, z) \longrightarrow (2r, \theta - \pi/4, z)$.

37. Describir el significado geométrico de cada una de las siguientes aplicaciones en coordenadas esféricas:

    a) $(\rho, \theta, \phi) \longrightarrow (\rho, \theta + \pi, \phi)$,

    b) $(\rho, \theta, \phi) \longrightarrow (\rho, \theta, \pi - \phi)$,

    c) $(\rho, \theta, \phi) \longrightarrow (2\rho, \theta + \pi/2, \phi)$.

38. Describir cada una de las siguientes superficies dadas en coordenadas cilíndricas: $r =$constante, $\theta =$constante y $z =$constante.

39. Describir cada una de las siguientes superficies dadas en coordenadas esféricas:
$\rho =$constante, $\theta =$constante y $\phi =$constante.

40. Dibujar (argumentando) la gráfica y la traza de cada una de las siguientes curvas:

a) $f(t) = (\operatorname{sen} t, 4 \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
b) **E2.** $f(t) = (2 \operatorname{sen} t, 4 \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
c) **E2.** $f(t) = (1 - t, t + 2)$, $-2 \leq t \leq 2$

41. Dibujar (argumentando) la traza de cada una de las siguientes curvas:

a) $f(t) = (2t - 1, t + 2, t)$, $0 \leq t \leq 2$.
b) $f(t) = (-t, 2t, 1/t)$, $1 \leq t \leq 3$.
c) $f(t) = (e^t, \cos t)$.

42. Dibujar las curvas de nivel para $z = 0, 1$ de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x, y) = \ln\left(\frac{1}{1-x^2-y^2}\right)$
b) $f(x, y) = \ln(x^2 + 3y^2 - 1)$
c) $f(x, y) = \ln(1 - 3x^2 - y^2)$