

Cálculo diferencial e integral 4

Guía 2

1. Demuestra el caso del teorema de Fubini que no se demostró en clase. Concretamente: sea $R = A \times B \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo compacto con A y B rectángulos de dimensión menor. Supongamos que $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable. Para cada $y \in B$, define $g_y : A \rightarrow \mathbb{R}$ por $g_y(x) = f(x, y)$. Demuestra que las funciones

$$\mathcal{L}(y) := \int_{\underline{A}} g_y \quad \text{y} \quad \mathcal{U}(y) := \int_{\overline{A}} g_y$$

son integrables y además

$$\int_R f = \int_{A \times B} f = \int_B \mathcal{L} = \int_B \mathcal{U}.$$

2. **E** Supongamos que $A \subset \mathbb{R}^n$ y $B \subset \mathbb{R}^k$ son rectángulos compactos. Sea $C \subset A \times B$ un conjunto de contenido cero. Definamos $A' \subset A$ como el conjunto de todas las $x \in A$ tales que

$$\{y \in B \mid (x, y) \in C\}$$

no tiene contenido cero. Probar que A' es un conjunto de medida cero.

3. Sea $C \subset [0, 1] \times [0, 1]$ la unión de todos los $\{p/q\} \times [0, 1/q]$ donde p/q es un número racional en $[0, 1]$ designado por su representante irreducible. Utilice C para demostrar que en el ejercicio anterior la palabra *medida* no puede ser sustituida por *contenido*.
4. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrable y no negativa. Sea $A_f = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$. Demuestra que A_f es Jordan medible y que tiene área (medida de Jordan) $\int_a^b f$.
5. Si $f : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable, probar que

$$\int_a^b \int_a^y f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_x^b f(x, y) dy dx.$$

6. a) Sea f continua en $[a, b] \times [c, d]$. Definamos para cada $(x, y) \in (a, b) \times (c, d)$, la función

$$F(x, y) = \int_a^x \int_c^y f(u, v) dv du.$$

Demostrar que $\partial^2 F / \partial x \partial y = \partial^2 F / \partial y \partial x = f(x, y)$.

- b) Utilizar el teorema de Fubini para demostrar que si f es de clase C^2 , entonces

$$\partial^2 f / \partial x \partial y = \partial^2 f / \partial y \partial x.$$

7. Sean $A = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Definamos $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$F(x) = \int_{[a_1, x_1] \times \cdots \times [a_n, x_n]} f, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in A.$$

Si x es un punto en el interior de A ¿quién es $\partial F / \partial x_i$?

8. Sea $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 . Definamos $F(y) = \int_a^b f(x, y)dx$. Demuestra la regla de Leibnitz: $F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y} dx$.
9. **E** Sea $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 . Definamos $F(x, y) = \int_a^x f(t, y)dt$.
- a) Encuentra $\partial f / \partial x$ y $\partial f / \partial y$.
- b) Si $G(x) = \int_a^{g(x)} f(t, x)dt$, encontrar $G'(x)$.
10. Sean A y B dos subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ Jordan medibles. Sea $A_c = \{(x, y) \mid (x, y, c) \in A\}$ y $B_c = \{(x, y) \mid (x, y, c) \in B\}$. Supongamos que cada A_c y cada B_c son Jordan medibles y tienen la misma área. Usa el principio de Cavalieri para demostrar que A y B tienen el mismo volumen.
11. Calcula las siguientes integrales iteradas

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy dx, \quad \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy.$$

(sugerencia: haz un cambio de variable que involucre a la función tangente) ¿Contradice tu resultado al teorema de Fubini?

12. **E** Sea $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 2y, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Demostrar que la integral iterada $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx$ existe pero que f no es integrable.

13. Sea f continua en $[a, b]$ y g continua en $[c, d]$. Demostrar que

$$\int_{[a, b] \times [c, d]} f(x)g(y) = \left(\int_a^b f(x)dx \right) \left(\int_c^d g(y)dy \right).$$

14. Sean $g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones de clase C^1 . Supongamos que $\partial g_1 / \partial y = \partial g_2 / \partial x$. Definamos la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \int_0^x g_1(t, 0)dt + \int_0^y g_2(x, t)dt.$$

- a) Demuestra que $\partial f / \partial y = g_2(x, y)$.
- b) Demuestra que $\partial f / \partial x = g_1(x, y)$.
15. **E** Calcular el volumen del sólido acotado por el plano xz , el plano yz , el plano xy , los planos $x = 1$, $y = 1$ y la superficie $z = x^2 + y^4$.
16. Calcular el volumen del sólido acotado por la gráfica $z = \sin y$, los planos $x = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $y = \pi/2$ y el plano xy .
17. Calcular las siguientes integrales iteradas y dibujar las regiones determinadas por sus límites.

- a) $\int_0^1 \int_0^{x^2} dy dx.$
- b) $\int_0^1 \int_1^{e^x} (x+y) dy dx.$
- c) $\int_{-3}^2 \int_0^{y^2} (x^2+y) dx dy.$
- d) $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos x} y \sin x dy dx.$

18. Sea D la región limitada por los semiejes positivos x e y y la recta $3x + 4y = 10$. Calcular $\int_D x^2 + y^2$

19. Sea D la región acotada por el eje y y la parábola $x = -4y^2 + 3$. Calcular $\int_D x^3 y$.

20. Expresar mediante una integral, el volumen del cono cuya base tiene radio r y cuya altura es h .

21. Sea D la región formada por los puntos (x, y) tales que $-\phi(x) \leq y \leq \phi(x)$, donde ϕ es una función continua no negativa definida en el intervalo $[a, b]$. Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = -f(x, -y)$. Demuestra que $\int_D f = 0$.

22. **E** Demostrar que el área del paralelogramo determinado por dos vectores planos (a_1, a_2) y (b_1, b_2) es $|a_1 b_2 - a_2 b_1|$.

23. En las siguientes integrales cambiar el orden de integración, dibujar las correspondientes regiones y calcular las integrales de las dos maneras:

- a) $\int_0^1 \int_x^1 xy dy dx.$
- b) $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos \theta} \cos \theta dr d\theta.$
- c) $\int_0^1 \int_1^{2-y} (x+y)^2 dx dy.$

24. Determina cuál es la región de integración que conduce a cada una de las siguientes integrales múltiples y evalúalas.

- a) **E** $\int_0^2 \left(\int_0^z \left(\int_0^{\sqrt{z^2-y^2}} x dx \right) dy \right) dz.$
- b) $\int_0^1 \left(\int_0^x \left(\int_{x^2+y^2}^{x+y} dz \right) dy \right) dx.$
- c) **E** $\int_{-1}^1 \left(\int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y} dy \right) dx.$

25. Sea $f : [0, a] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

a) Identifica la región que conduce a la siguiente integral iterada:

$$\int_0^a \left(\int_0^x \left(\int_0^y f(z) dz \right) dy \right) dx.$$

b) Usa el teorema de Fubini para probar la siguiente identidad:

$$\int_0^a \left(\int_0^x \left(\int_0^y f(z) dz \right) dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^a f(z)(a-z)^2 dz.$$

26. Si $f(x, y) = e^{\sin(x+y)}$ y $D = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$, probar que

$$\frac{1}{e} \leq \frac{1}{a\pi^2} \int_D f \leq e.$$

27. Demostrar que

$$\frac{1}{6} \leq \int_D \frac{1}{y-x+3} \leq \frac{1}{4},$$

donde D es el triángulo con vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$ y $(1, 0)$.

28. Calcular $\int_D e^{x-y}$ donde D es el triángulo con vértices $(0, 0)$, $(1, 3)$ y $(2, 2)$

29. Encontrar el volumen del sólido limitado por $x^2 + 2y^2 = 2$, $z = 0$ y $x + y + 2z = 2$.

30. **E** Encontrar el volumen de la región que resulta de intersectar los dos cilindros $x^2 + y^2 \leq a^2$ y $x^2 + z^2 \leq a^2$.

31. Calcular cada una de las siguientes integrales:

a) $\int_W (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$, donde W es la región acotada por $x + y + z = a$ ($a > 0$), $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$.

b) $\int_W z dx dy dz$, donde W es la región acotada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 1$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con $x \geq 0$, $y \geq 0$.

c) $\int_W (x^2 + y^2) dx dy dz$, donde W es la pirámide con vértice superior $(0, 0, 1)$ y cuyos vértices en la base son $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(1, 1, 0)$.

32. En cada inciso, encuentra la imagen bajo la transformación g de la región A e integra f sobre $g(A)$.

a) $g(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$, $A = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u, v \geq 0 \text{ y } u^2 + v^2 \leq 1\}$, y $f(x, y) = \frac{1}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}$.

b) $g(u, v) = (u, v(1 + u^2))$, $A = [0, 3] \times [0, 2]$ y $f(x, y) = x$.

33. Sea $D^* = [0, 1] \times [0, 1]$ y defínase T en D^* mediante $T(u, v) = (-u^2 + 4u, v)$. Hallar $D = T(D^*)$ ¿Es T inyectiva?

34. **E** Sea D^* el paralelogramo limitado por las rectas $y = 3x + 4$, $y = 3x$, $y = \frac{1}{2}x$, $y = \frac{1}{2}(x + 4)$. Sea $D = [0, 1] \times [0, 1]$. Hallar una aplicación T tal que $D = T(D^*)$.

35. Sea D^* el paralelogramo con vértices en $(-1, 3)$, $(0, 0)$, $(2, -1)$ y $(1, 2)$ y sea $D = [0, 1] \times [0, 1]$. Hallar una función T tal que $T(D^*) = D$.

36. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ el cambio a coordenadas esféricas definido por $(\rho, \phi, \theta) \rightarrow (x, y, z)$, donde

$$x = \rho \cos \phi \cos \theta, \quad y = \rho \cos \phi \sin \theta, \quad z = \rho \sin \phi.$$

Sea $D^* = \{(\rho, \phi, \theta) \mid \rho \in [0, 1], \phi \in [0, \pi], \theta \in [0, 2\pi]\}$. Hallar $D = T(D^*)$ ¿Es T inyectiva? Si no lo es, ¿se puede quitar un subconjunto a D^* de forma que en lo que quede T sea inyectiva?

37. En cada inciso haz un dibujo de la región dada y calcula su área.

a) La región acotada por las curvas cuyas ecuaciones polares son $\theta = 0$, $\theta = \pi/4$ y $r = \theta^2$.

- b) La región que está dentro de la curva $r = 1 + \cos(\theta)$ y fuera de la curva $r = 1$.
 c) **E** La región que está dentro de la curva $r = 3 \sin(\theta)$ y fuera de la curva $r = 1 + \sin(\theta)$.

38. Hallar la media de $f(x, y) = e^{x+y}$ sobre el triángulo con vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 0)$.
 39. Hallar el centro de masa de la región entre $y = x^2$ e $y = x$ si la densidad es $x + y$.
 40. Hallar el centro de masa de la región entre $y = 0$ e $y = x^2$, donde $0 \leq x \leq 1/2$.
 41. Una placa de oro está definida por $0 \leq x \leq 2\pi$ y $0 \leq y \leq \pi$ (centímetros) y tiene una densidad de masa $\delta(x, y) = y^2 \sin^2(4x) + 2$ (gramos por centímetro cuadrado). Si el oro se vende a 7 euros por gramo, ¿Cuánto vale el oro de la placa?
 42. Hallar el centro de masa del cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$, $1 \leq z \leq 2$, si la densidad es $(x^2 + y^2)z^2$.
 43. **E** Sea A la región determinada por la circunferencia de radio 1 y centro en $(0, 1)$. Supongamos que A es una placa metálica cuya densidad de masa ρ está dada por

$$\rho(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{si } x \in [-1, 0], \\ y^2 & \text{si } x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Calcula la masa total de A y el centro de masa de A .

44. Hallar el valor medio de e^{-z} sobre la bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.
 45. Sea $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$. Calcula $\int_D e^{x^2+y^2} dx dy$.
 46. Sea D la región $0 \leq y \leq x$ y $0 \leq x \leq 1$. Calcular $\int_D (x + y) dx dy$, por medio del cambio de variables $x = u + v$, $y = u - v$. Comprobar el resultado por medio del cálculo directo de la integral.
 47. Sea $T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ la aplicación definida por $T(u, v) = (4u, 2u + 3v)$. Sea D^* el rectángulo $[0, 1] \times [1, 2]$. Hallar $D = T(D^*)$ y calcular las integrales

$$\int_D xy dx dy, \quad \int_D (x - y) dx dy,$$

por medio de un cambio de variables que las calcule sobre D^* .

48. Calcular

$$\int_D \frac{dx dy}{\sqrt{1+x+2y}},$$

donde $D = [0, 1] \times [0, 1]$, haciendo el cambio de variables $T(u, v) = (u, v/2)$.

49. Definir $T(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$. Sea D^* el conjunto de los puntos (u, v) con $u^2 + v^2 \leq 1$, $u \geq 0$, $v \geq 0$. Hallar $D = T(D^*)$ y calcular el área de D .
 50. **E** Calcular $\int_R \frac{dx dy}{x+y}$, donde R es la región acotada por $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$, $x + y = 4$, por medio de la aplicación $T(u, v) = (u - uv, uv)$.
 51. Integrar $x^2 + y^2 + z^2$ sobre el cilindro $x^2 + y^2 \leq 2$, $-2 \leq z \leq 3$.

52. Sea $\mathbb{B}^3$ la bola cerrada unitaria de $\mathbb{R}^3$. Calcular $\int_{\mathbb{B}^3} \frac{dxdydz}{\sqrt{2+x^2+y^2+z^2}}$.
53. Integrar $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ sobre la región acotada por las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, donde $0 < b < a$.
54. **E** Calcular $\int_B z dx dy dz$, donde B es la región dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ por encima del plano xy y por debajo del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.