Cálculo diferencial e integral 4

Guía 3

Los ejercicios marcados con una **E** deberán entregarse por equipos el día 15 de abril ¡al inicio de clase!

- Sean $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva de clase C^1 y con $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$ y $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ valores reales.

a) Si $f, g : \gamma([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ son continuas por pedazos, demuestra que

$$\int_{\gamma} (\mu f + \lambda g) ds = \mu \int_{\gamma} f ds + \lambda \int_{\gamma} g ds$$

b) Si $F, G : \gamma([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}^n$ son continuas por pedazos, demuestra que

$$\int_{\gamma} (\mu F + \lambda G) \cdot ds = \mu \int_{\gamma} F \cdot ds + \lambda \int_{\gamma} G \cdot ds.$$

- Sea $f(x, y, z) = y$ y $c(t) = (0, 0, t)$, $t \in [0, 1]$. Demostrar que $\int_c f ds = 0$.

- Evaluar $\int_c f ds$ donde

a) $f(x, y, z) = x + y + z$ y $c(t) = (\sin t, \cos t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

b) $f(x, y, z) = \cos z$ y $c(t) = (\sin t, \cos t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

c) $f(x, y, z) = \exp(\sqrt{z})$ y $c(t) = (1, 2, t^2)$, $t \in [0, 1]$.

d) $f(x, y, z) = x \cos z$ y $c(t) = (t, t^2, 0)$, $t \in [0, 1]$.

e) $f(x, y, z) = z$ y $c(t) = (t \cos t, t \sin t, t)$ para $0 \leq t \leq t_0$.

- Demostrar que la integral de $f(x, y)$ a lo largo de una trayectoria dada en coordenadas polares por $r = r(\theta)$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ es:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta.$$

Calcular la longitud de la trayectoria $r = 1 + \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

- E.** Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una trayectoria descrita en coordenadas cilíndricas por

$$\gamma(t) = (r(t), \theta(t), z(t)).$$

Demuestra que la longitud de γ está dada por

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt.$$

6. **E.** Consideremos la curva parametrizada por $c(t) = (0, a \operatorname{sen} t, a \operatorname{cos} t)$. Supongamos que dicha curva está hecha de alambre con una densidad uniforme de 2 gramos por unidad de longitud.
- ¿Cuál es la masa del alambre?
 - ¿Cómo encontrarías el centro de masa del alambre? Justifica tu respuesta.
7. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^1 , definimos la *longitud de la gráfica de f* como la longitud de la trayectoria $t \rightarrow (t, f(t))$, $t \in [a, b]$.
- Demostrar que la longitud de la gráfica de f en $[a, b]$ es $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$.
 - Hallar la longitud de la gráfica de $y = \log x$, si $x \in [1, 2]$.
8. Hallar la masa de un alambre formado por la intersección de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y el plano $x + y + z = 0$ si la densidad en (x, y, z) está dada por $\rho(x, y, z) = x^2$ gramos por unidad de longitud del alambre.
9. Sea $F(x, y, z) = xi + yj + zk$. Evaluar la integral de $\int_c F \cdot ds$ a lo largo de cada una de las siguientes trayectorias:
- $c(t) = (t, t, t)$, $t \in [0, 1]$,
 - $c(t) = (\operatorname{cos} t, \operatorname{sen} t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$,
 - $c(t) = (t^2, 3t, 2t^3)$, $t \in [-1, 2]$.
10. Evaluar cada una de las siguientes integrales de línea
- $\int_c xdy - ydx$, $c(t) = (\operatorname{cos} t, \operatorname{sen} t)$ con $t \in [0, 2\pi]$.
 - $\int_c xdx + ydy$, $c(t) = (\operatorname{cos} \pi t, \operatorname{sen} \pi t)$ con $t \in [0, 2]$.
 - $\int_c yzdx + xzdy + xydz$, donde c está formada por los segmentos rectilíneos que unen $(1, 0, 0)$ con $(0, 1, 0)$ y éste con $(0, 0, 1)$.
 - $\int_c x^2dx - xydy + dz$, donde c es la parábola $z = x^2$, $y = 0$ de $(-1, 0, 1)$ a $(1, 0, 1)$.
11. **E.** Para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, sea $F(x, y)$ el vector unitario que apunta hacia el origen desde (x, y) . Calcula el trabajo realizado al mover una partícula sobre el campo vectorial F desde el punto $(2a, 0)$ al $(0, 0)$ a lo largo de la mitad superior del círculo $(x - a)^2 + y^2 = a^2$.
12. Sea c una trayectoria suave.
- Supongamos que F es perpendicular a $c'(t)$ en el punto $c(t)$. Demostrar que $\int_c F \cdot ds = 0$

b) Si F es paralelo a $c'(t)$ en $c(t)$, demostrar que $\int_c F \cdot ds = \int_c \|F\| ds$.

13. Supongamos que la trayectoria c tiene longitud l y que $\|F\| \leq M$. Demostrar que

$$\left| \int_c F \cdot ds \right| \leq Ml.$$

14. Evaluar $\int_c F \cdot ds$, donde $F(x, y, z) = yi + 2xj + yk$ y la trayectoria $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ está definida por $c(t) = ti + t^2j + t^3k$.

15. Supongamos que c_1 y c_2 son dos trayectorias con los mismos extremos y que F es un campo vectorial. Demostrar que $\int_{c_1} F \cdot ds = \int_{c_2} F \cdot ds$ es equivalente a $\int_c F \cdot ds = 0$ donde c es la curva cerrada que se obtiene al moverse primero a lo largo de c_1 y después a lo largo de c_2 en el sentido opuesto.

16. Sea $c(t)$ una trayectoria y T el vector tangente unitario ¿Qué es $\int_c T \cdot ds$?

17. **E.** Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una parametrización de clase C^1 de una curva en $\mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$. Supongamos que $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$. Sea $F = (F_1, F_2)$ un campo vectorial. Definamos la forma diferencial $\omega = -F_2 dx + F_1 dy$. Demuestra que

$$\int_\gamma F \cdot N ds = \int_\gamma \omega,$$

donde $N(\gamma(t))$ es el vector normal unitario dado por

$$N(\gamma(t)) = \frac{(\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))}{\|\gamma'(t)\|}.$$

18. **E.** Sea $F = (z^3 + 2xy)i + x^2j + 3xz^2k$. Calcular la integral de línea F a lo largo del perímetro del cuadrado con vértices $(\pm 1, \pm 1)$, en sentido levógiro.

19. a) Considera la trayectoria $c(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Dibujar la traza de la curva y evaluar la integral del campo vectorial $F(x, y) = xi + yj$ a lo largo de esta curva.

b) Usando la trayectoria anterior observar que una aplicación $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1 puede tener una imagen que *no parece suave*.

20. Evaluar la integral de línea

$$\int_c 2xyz dx + x^2 z dy + x^2 y dz,$$

donde c es una curva simple orientada que conecta $(1, 1, 1)$ con $(1, 2, 4)$.

21. **E.** Supongamos que $\nabla f(x, y, z) = 2xyze^{x^2}i + ze^{x^2}j + ye^{x^2}k$. Si $f(0, 0, 0) = 5$ hallar $f(1, 2, 4)$.
22. Sea $d\theta = (-ydx + xdy)/(x^2 + y^2)$. Pensando en coordenadas polares, explica porqué parece *obvio* que $\int_{\gamma} d\theta = 2\pi$, donde $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Aceptando este echo, deducir que

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}.$$

23. **E.** Sea $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ y

$$\omega = \frac{(x - y)dx + (x + y)dy}{x^2 + y^2}.$$

Calcula $\int_{\gamma} \omega$. Explica cuidadosamente porqué no existe ninguna función f tal que $df = \omega$.

24. Encontrar la ecuación del plano tangente a la superficie dada en el punto especificado:
- $x = 2u$, $y = u^2 + v$, $z = v^2$, en $(0, 1, 1)$.
 - $x = u^2 - v^2$, $y = u + v$, $z = u^2 + 4v$, en $(-1/4, 1/2, 2)$.
 - $x = u^2$, $y = u \sin e^v$, $z = 1/3u \cos e^v$, en $(13, -2, 1)$.
 - $x = u^2$, $y = v^2$, $z = u^2 + v^2$, en $u = 1$ y $v = 1$.

25. **E.** Hallar una expresión para el vector tangente unitario normal a cada una de las siguientes superficies. Identificar la superficie.

- $x = 3 \cos \theta \sin \phi$, $y = 2 \sin \theta \sin \phi$, $z = \cos \phi$, para $\theta \in [0, 2\pi]$ y $\phi \in [0, \pi]$.
- $x = (2 - \cos v) \cos u$, $y = (2 - \cos v) \sin u$, $z = \sin v$, para $u \in [-\pi, \pi]$ y $\phi \in [-\pi, \pi]$. ¿Es regular esta superficie?

26. Obtener una fórmula para los planos tangentes a las superficies $x = h(y, z)$ y $y = k(x, z)$.
27. Hallar una parametrización de la superficie $z = 3x^2 + 8xy$ y usarla para hallar el plano tangente en $(1, 0, 3)$.
28. Hallar una parametrización de la superficie $x^3 + 3xy + z^2 = 2$, $z > 0$, y usarla para hallar la ecuación del plano tangente en el punto $(1, 1/3, 0)$.

29. **E.** Hallar una parametrización para el hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 25$ y usarla para encontrar el vector normal unitario y la ecuación del plano tangente en los puntos $(x_0, y_0, 0)$ con $x_0^2 + y_0^2 = 25$.

30. Hallar el área de la superficie de la esfera unitaria S representada paramétricamente por $\Phi : D \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$, donde $D = [0, 2\pi] \times [0, \phi]$ y

$$\Phi(\theta, \phi) = (\cos \theta \sin \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \phi).$$

31. Hallar el área de la superficie del helicoido representada paramétricamente por $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde $D = [0, 1] \times [0, 3\pi]$ y

$$\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \theta).$$

32. **E.** El toro T se puede representar paramétricamente por la función $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde $D = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$,

$$\Phi(\theta, \phi) = ((R + \cos \phi) \cos \theta, (R + \cos \phi) \sin \theta, \sin \phi)$$

y $R > 1$. Haz un dibujo de T y encuentra el área de la superficie.

33. Encontrar el área de la porción de la esfera unitaria contenida en el cono $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$.

34. Hallar una parametrización de la superficie $x^2 - y^2 = 1$, donde $x > 0$, $-1 \leq y \leq 1$ y $0 \leq z \leq 1$. Encontrar el vector normal a la superficie.

35. Encontrar una parametrización del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Hallar el vector normal a la superficie en cada uno de sus puntos.

36. a) Rotamos la curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ al rededor del eje y . Demostrar que el área de la superficie barrida viene dada por

$$A = 2\pi \int_a^b |x| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

b) Hallar el área de la superficie obtenida al rotar la curva $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$, alrededor del eje y .

37. El cilindro $x^2 + y^2 = x$, divide la esfera unitaria S en dos regiones S_1 y S_2 , donde S_1 está dentro del cilindro y S_2 fuera. Hallar el cociente de las áreas $A(S_2)/A(S_1)$.

38. **E.** Calcular $\int \int_S xy dS$, donde S es la superficie del tetraedro de caras $z = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$ y $x = y$.
39. Evaluar $\int \int_S xyz dS$, donde S es el triángulo con vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ y $(0, 1, 1)$.
40. Evaluar $\int \int_S (x + y + z) dS$, donde S es la esfera unitaria.
41. Evaluar $\int \int_S x^2 dS$ donde S es la frontera del cubo $C = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$.
42. Una superficie metálica S tiene la forma del hemisferio $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, donde (x, y) satisface $0 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$. La densidad de masa en (x, y, z) está dada por $m(x, y, z) = x^2 + y^2$. Hallar la masa total de S .
43. Comprobar que en coordenadas esféricas, sobre una esfera de radio R ,

$$\|T_\phi \times T_\theta\| d\phi d\theta = R^2 \sin \phi d\phi d\theta.$$

44. Calcular la integral $\int \int_S F \cdot dS$ donde S es toda la superficie de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $z \geq 0$ orientada por la normal que apunta hacia el exterior, y $F = (x + 3y^5)i + (y + 10xz)j + (z - xy)k$.
45. Evaluar la integral de superficie $\int \int_S F \cdot ndS$, donde $F(x, y, z) = i + j + z(x^2 + y^2)^2 k$ y S es la superficie del cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$ $0 \leq z \leq 1$.
46. **E.** Demostrar el siguiente teorema del valor medio para integrales de superficie: Si F es un campo vectorial continuo, entonces

$$\int \int_S F \cdot ndS = [F(Q) \cdot n(Q)]A(S),$$

para algún $Q \in S$, donde $A(S)$ es el área de S .

47. Sea S una superficie en $\mathbb{R}^3$, que es en realidad un subconjunto D del plano xy . Demostrar que la integral de una función escalar $f(x, y, z)$ sobre S se reduce a la integral de $f(x, y, z)$ sobre D ¿En qué se convierte la integral de un campo vectorial sobre S ?
48. Para $a, b, c > 0$, sea S la mitad superior del elipsoide

$$S = \left\{ (x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, z \geq 0 \right\},$$

orientada con la normal hacia arriba. Calcular $\int \int_S F \cdot dS$, donde $F(x, y, z) = (x^3, 0, 0)$.