Cálculo diferencial e integral 4

Guía 4

1. Calcular la divergencia y el rotacional de los siguientes campos vectoriales:

a) $V(x, y, z) = yzi + xzj + xyk.$

b) $V(x, y, z) = x^2i + (x + y)^2j + (x + y + z)^2k.$

c) $F(x, y) = yi - xj$

d) $F(x, y) = xe^yi - (y/(x + y))j$

e) $F(x, y, z) = \frac{yzi+xzj+xyk}{x^2+y^2+z^2}.$

2. Demostrar que $F(x, y) = y(\cos x)i + x(\sin y)j$ no es un campo gradiente.

3. Demostrar que $F(x, y) = (x^2 + y^2)i - 2xyj$ no es un campo gradiente.

4. Supongamos que $\nabla \cdot F = 0$ y $\nabla \cdot G = 0$. ¿Cuál de los siguientes campos tiene necesariamente divergencia nula?

a) $F + G$

b) $F \times G$

5. Sea $F(x, y, z) = 3x^2yi + (x^3y^3)j$. Comprobar que $\nabla \times F = 0$ y encontrar una función f tal que $\nabla f = F$.

6. **E.** Sea $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^2 . Demuestra la siguientes identidades:

a) $\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0.$

b) $\nabla \times (\nabla \times F) = \nabla(\nabla \cdot F) - \nabla^2 F$, donde $\nabla^2 F = \nabla^2 F_1i + \nabla^2 F_2j + \nabla^2 F_3k$ y $F = F_1i + F_2j + F_3k$.

7. **E.** Usando el teorema de Green, evaluar $\int_C ydx - xdy$, donde C es la frontera del cuadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$ orientada en la dirección levógira.

8. Hallar el área de un círculo de radio R usando el teorema de Green.

9. Comprobar el teorema de Green para el círculo de centro en $(0, 0)$ y radio R y las funciones

a) $P(x, y) = xy^2, Q(x, y) = -yx^2.$

b) $P(x, y) = xy = Q(x, y).$

10. Usando el teorema de la divergencia, demostrar que $\int_{\partial D} F \cdot nds = 0$, donde $F(x, y) = yi - xj$ y D es el círculo unidad. Comprobarlo directamente.

11. Bajo las condiciones del teorema de Green, demostrar que

a) $\int_{\partial D^+} PQdx + PQdy = \iint_D \left[Q \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) + P \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \right] dx dy.$

b) $\int_{\partial D^+} \left(Q \frac{\partial P}{\partial x} - P \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx + \left(P \frac{\partial Q}{\partial y} - Q \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy = 2 \iint_D \left(P \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} - Q \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \right) dx dy.$

12. Sea D una región en la cual es válido el teorema de Green. Supongamos además que f es armónica ($\nabla^2 f = 0$). Demostrar que

$$\int_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial y} dx - \frac{\partial f}{\partial x} dy = 0.$$

13. a) Comprobar el teorema de la divergencia para $F(x, y) = xi + yj$ y D el círculo unidad $x^2 + y^2 \leq 1$.
 b) Evaluar la integral de la componente normal de $2xyi - y^2j$ a lo largo de la elipse definida por $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

14. Sea $P(x, y) = -y/(x^2 + y^2)$ y $Q(x, y) = x/(x^2 + y^2)$. Suponiendo que D es el círculo unitario, analizar porqué en este caso podemos aplicar el teorema de Green.

15. Utilizar el teorema de Green para evaluar $\int_{C^+} (y^2 + x^3)dx + x^4 dy$, donde C^+ es el perímetro del cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ recorrido en dirección levógira.

16. Usa el teorema de Green para el cálculo de áreas, para demostrar que el área de una región expresada en coordenadas polares es $A = \frac{1}{2} \int_a^b r^2 d\theta$.

17. Demostrar la identidad

$$\int_{\partial D} \phi \nabla \phi \cdot n ds = \iint_D (\phi \nabla^2 \phi + \nabla \phi \cdot \nabla \phi) dA.$$

18. **E.** Demostrar que si C es una curva cerrada simple que acota una región en la cual es aplicable el teorema de Green, entonces el área de la región D encerrada por C es:

$$A = \int_{C^+} x dy = \int_{C^-} y dx.$$

19. **E.** El “Folium de Descartes” es la curva en $\mathbb{R}^2$ descrita por la ecuación $x^3 + y^3 = 3xy$.
 a) Haz un dibujo de esta curva y describe su comportamiento.
 b) Encuentra la parametrización en coordenadas polares de esta curva.
 c) La parte de la curva que se encuentra en el cuadrante positivo de $\mathbb{R}^2$ es una curva cerrada. Encuentra el área de la región que encierra.

20. **E.**

- a) Sea $p \in \mathbb{R}^2$ un punto cualquiera. Definamos el campo vectorial $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ de la siguiente manera:

$$F(x) = \nabla(\ln(\|x - p\|^2)).$$

Supongamos que C es un círculo centrado en p orientado en sentido levógira. Demuestra que

$$\int_C F \cdot n ds = 4\pi.$$

b) Sean $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}^2$ puntos distintos y $q_1, \dots, q_n$ escalares. Definamos $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_n\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ de la siguiente manera:

$$F(x) = \sum_{i=1}^n q_i \nabla(\ln(\|x - p_i\|^2)).$$

Supongamos que C es una curva cerrada simple (orientada en sentido levógiro) la cual encierra al conjunto $\{p_1, \dots, p_n\}$. Demuestra que

$$\int_C F \cdot nds = 4\pi(q_1 + \dots, q_n).$$

21. Comprobar el teorema de Stokes para la semiesfera superior $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $z \geq 0$, y el campo vectorial $F(x, y, z) = xi + yj + zk$.
22. Sea S la superficie cilíndrica con tapa formada por la unión de las superficies S_1 y S_2 , donde S_1 es el conjunto de puntos (x, y, z) tales que $x^2 + y^2 = 1$, $z \in [0, 1]$, y S_2 es el conjunto de puntos (x, y, z) tales que $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$, $z \geq 1$. Sea $F(x, y, z) = (zx + z^2y + x)i + (z^3yx + y)j + (z^4x^2)k$. Calcular $\iint_S (\nabla \times F) \cdot dS$.
23. Sea c el camino formado por los segmentos rectilíneos que unen $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$, y sea S el triángulo con esos vértices. Comprobar el teorema de Stokes directamente para $F(x, y, z) = yzi + xzj + xyk$.
24. **E.** Calcular la integral $\iint_S (\nabla \times F) \cdot dS$ donde S es la porción de la superficie de la esfera definida por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $x + y + z \geq 1$ y donde $F(x, y, z) = (x, y, z) \times (1, 1, 1)$.
25. Hallar $\iint_S (\nabla \times F) \cdot dS$, donde S es el elipsoide $x^2 + y^2 + 2z^2 = 10$ y $F(x, y, z) = (\sin xy)i + e^x j + yzk$.
26. Sea S una superficie y sea F perpendicular a la tangente a la frontera de S , demostrar que $\iint_S (\nabla \times F) \cdot dS = 0$.
27. **E.** Sea $C = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Encuentra tres superficies distintas S_1, S_2 y S_3 , tales que $C = \partial S_1 = \partial S_2 = \partial S_3$.
28. Considerar dos superficies S_1 y S_2 con la misma frontera ∂S . Describir mediante un esquema cómo deben orientarse S_1 y S_2 para asegurar que

$$\iint_{S_1} (\nabla \times F) \cdot dS = \iint_{S_2} (\nabla \times F) \cdot dS.$$

29. Para una superficie S y un vector fijo v , demostrar que

$$2 \iint_S v \cdot ndS = \int_{\partial S} (v \times r) \cdot ds$$

donde $r(x, y, z) = (x, y, z)$.

30. Razonar intuitivamente que si S es una superficie cerrada, entonces $\iint_S (\nabla \times F) \cdot dS = 0$.
31. Si C es una curva cerrada que es la frontera de una superficie S y $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones de clase C^2 , demostrar que

- a) $\int_C f \nabla g \cdot ds = \iint_S (\nabla f \times \nabla g) \cdot dS$.
- b) $\int_C (f \nabla g + g \nabla f) \cdot ds = 0$
32. a) Si C es una curva cerrada que es la frontera que una superficie S y v es un vector constante, demostrar que $\int_C v \cdot ds = 0$.
- b) Demostrar que el resultado anterior es cierto aunque C no sea la frontera de ninguna superficie.
33. Sea $F(x, y, z) = (3y, -xz, -yz^2)$. Integrar $\nabla \times F$ sobre el trozo de la superficie $2z = x^2 + y^2$ que está por debajo del plano $z = 2$ de dos formas: directamente y usando el teorema de Stokes.
34. Sea $F(x, y) = (xy, y^2)$ y sea c la trayectoria que une los los puntos $(0, 0)$ y $(1, 2)$ en $\mathbb{R}^2$ recorriendo la gráfica de $y = 2x^2$. Evaluar $\int_C F \cdot ds$. ¿Depende esta integral de cuál sea la trayectoria que une los puntos $(0, 0)$ y $(1, 2)$? Justifica tu respuesta.
35. Sea $F(x, y, z) = (2xyz + \text{sen } x)i + x^2zj + x^2yk$. Hallar una función f tal que $F = \nabla f$.
36. Demostrar que $F = -r/\|r\|^3$ es un campo conservativo si $r(x, y, z) = (x, y, z)$. Encontrar f tal que $\nabla f = F$.
37. Sea $F(x, y, z) = (xy, y, z)$ ¿Puede existir una función f tal que $F = \nabla f$?
38. Determinar cuáles de los siguientes campos vectoriales F son el gradiente de una función escalar f y, si es el caso, encuentra dicha función f .
- a) $F(x, y) = (x, y)$,
- b) $F(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy)$,
- c) $F(x, y) = (\cos xy - xy \text{sen } xy, x^2 \text{sen } xy)$,
- d) $F(x, y) = (x\sqrt{x^2y^2 + 1}, y\sqrt{x^2y^2 + 1})$,
- e) $F(x, y) = (2x \cos y + \cos y, -x^2 \text{sen } y - x \text{sen } y)$.
39. Demostrar que los campos vectoriales siguientes son conservativos. Calcular $\int_C F \cdot ds$ para la curva dada.
- a) $F(x, y) = (xy^2 + 3x^2y)i + (x + y)x^2j$; C es la curva formada por los segmentos que unen $(1, 1)$ con $(0, 2)$ y $(3, 0)$.
- b) $F(x, y) = (\cos(xy^2) - xy^2 \text{sen}(xy^2))i - 2x^2y \text{sen}(xy^2)j$; C es la curva (e^t, e^{t+1}) , $-1 \leq t \leq 0$.
40. **E.** Sea $W = [0, 1]^3$ el cubo unitario. Evaluar $\iint_{\partial W} F \cdot dS$ donde F está definido por
- a) $F(x, y, z) = i + j + k$,
- b) $F(x, y, z) = x^2i + x^2j + z^2k$.

Realizar el cálculo directamente y comprobarlo usando el teorema de la divergencia.

41. Sea $F = yi + zj + xzk$. Evaluar $\iint_{\partial W} F \cdot dS$ para cada una de las siguientes regiones W :
- a) $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$.
- b) $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$ y $x \geq 0$.

c) $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$ y $x \leq 0$.

42. Evaluar $\iint_S F \cdot dS$ donde $F = 3xy^2i + 3x^2yj + z^3k$ y S es la superficie de la esfera unitaria.

43. Demostrar las identidades de Green.

a) Sea W una región bonita de $\mathbb{R}^3$. Supongamos que f y g son funciones de clase C^2 definidas en un abierto que contiene a W . Demostrar que

$$\iint_{\partial W} f \nabla g \cdot ndS = \iiint_W (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g)$$

y

$$\iint_{\partial W} (f \nabla g - g \nabla f) \cdot ndS = \iiint_W (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f).$$

b) **E.** Formula y demuestra las identidades análogas para el caso en que D es una región bonita de $\mathbb{R}^2$ (es decir, en la cual es válida el teorema de Green) y f y g son funciones de clase C^2 definidas en un abierto que contiene a D .

44. **E.** Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ una región para la cual es válida el teorema de Green.

a) Supongamos que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es armónica en D (es decir, $\nabla^2 f = 0$), demuestra que

$$\iint_D \|\nabla f\|^2 = \int_{\partial D^+} f \nabla f \cdot nds.$$

b) Supongamos que f y g satisfacen la ecuación de Poisson en una región $D \subset \mathbb{R}^2$; es decir:

$$\nabla^2 f = \nabla^2 g = \phi$$

donde $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ es una función definida en D . Si $f = g$ en ∂D , demuestra que $f = g$ en D . Este resultado se conoce como el Teorema de unicidad para soluciones de la ecuación de Poisson.

45. Supongamos que F es tangente a la superficie cerrada $S = \partial W$ de una región W . Demostrar que

$$\iiint_W \nabla \cdot F = 0.$$