Cálculo diferencial e integral 4

<http://academicos.fciencias.unam.mx/nataliajonard/calculo-4>

- A menos que indiquemos lo contrario, R siempre denotará un rectángulo de la forma

$$R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n,$$

con $a_i < b_i$.

- Los ejercicios marcados con una **E** deben entregarse en equipos de 4 a 6 integrantes. La fecha de entrega será el miércoles 17 de febrero.

Guía 1

1. Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo y $\mathcal{P}$ una partición de R . Demuestra que el volumen de R es igual a la suma de los volúmenes de todos los subrectángulos inducidos por la partición $\mathcal{P}$.
2. Supongamos que $R \subset \mathbb{R}^n$ es un rectángulo y que $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son dos particiones de R . Demuestra que $\mathcal{Q}$ refina a $\mathcal{P}$ si y sólo si $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$.
3. Sean $f, g : R \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones integrables.

- a) Demuestra que $f + g$ es integrable sobre R y que $\int_R f + g = \int_R f + \int_R g$.
- b) Sea $c \in \mathbb{R}$. Demuestra que cf es integrable y que $\int_R cf = c \int_R f$.
- c) **E.** Si $f(x) \geq 0$ para todo $x \in R$, entonces

$$\int_R f \geq 0.$$

- d) **E.** Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in R$, entonces $\int_R f \leq \int_R g$.
- e) **E.** $|\int_R f| \leq \int_R |f|$.
- f) **E.** Si $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in R$, entonces

$$m \cdot \nu(R) \leq \int_R f \leq M \cdot \nu(R).$$

4. **E.** Supongamos que $R \subset \mathbb{R}^n$ es un rectángulo y $f : R \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función integrable sobre R . Demuestra que f es integrable sobre S para cualquier rectángulo $S \subset R$.
5. Considera una función acotada $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ definida en un rectángulo R . Supongamos que $f(x) = 0$ para todo x en $\text{int}(R)$.
 - a) Demuestra que $L(f, \mathcal{P}) = 0$ para toda partición $\mathcal{P}$ de R .
 - b) Demuestra que f es integrable sobre R y encuentra el valor de $\int_R f$.

6. Sea $A = [0, 1] \times [0, 1]$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2, \\ 1, & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Demuestra que f es integrable y $\int_A f = 1/2$.

7. Sea $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{P}$ una partición de R . Demuestra que f es integrable sobre R si y sólo si para cada subrectángulo S , la restricción $f|_S$ es integrable sobre S . Además prueba que en este caso

$$\int_A f = \sum_S \int_S f|_S.$$

8. Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo y $f : R \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función. Supongamos que f^2 es integrable sobre R . Demuestra que $|f|$ es integrable sobre R . ¿Será cierto que f es integrable sobre R ?

9. Para cada una de las siguientes funciones, encuentra el conjunto $D = \{x \mid f \text{ es discontinua en } x\}$.

a) $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ ó } y \text{ es irracional, } 0 \text{ ó } 1, \\ 1/p, & \text{si } (x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \quad y = q/p, \quad (q, p) = 1. \end{cases}$$

b) $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } (x, y) \notin \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{si } (x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}. \end{cases}$$

En cada caso, demuestra si el conjunto D tiene o no medida cero.

10. Sea $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ ó } y \text{ es irracional, } 0 \text{ ó } 1, \\ 1/p, & \text{si } (x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \quad y = q/p, \quad (q, p) = 1. \end{cases}$$

Demuestra que f es integrable y que $\int_{[0,1] \times [0,1]} f = 0$.

11. Sea $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ ó } y \text{ es irracional, } 0 \text{ ó } 1, \\ \frac{1}{n} + \frac{1}{q}, & \text{si } (x, y) = (\frac{m}{n}, \frac{p}{q}) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \text{ con } (q, p) = 1 = (m, n). \end{cases}$$

Determina si f es integrable o no. En caso de ser integrable, encuentra el valor de la integral.

12. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable. Supongamos que $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ es igual a f excepto en un conjunto finito de puntos. Demuestra que g es integrable y que $\int_A f = \int_A g$.
13. a) Demuestra que $A \subset \mathbb{R}^n$ tiene medida cero si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existen rectángulos abiertos $U_1, U_2, \dots$ que cubren a A y tales que $\sum_{i=1}^{\infty} \nu(U_i) < \varepsilon$.
- b) Demuestra que $A \subset \mathbb{R}^n$ tiene contenido cero si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existen rectángulos abiertos $U_1, U_2, \dots, U_k$ que cubren a A y tales que $\sum_{i=1}^k \nu(U_i) < \varepsilon$.
- c) En los dos incisos anteriores ¿es posible sustituir la palabra “rectángulos” por la palabra “conjuntos”?
14. a) Probar que un conjunto no acotado no puede tener contenido cero.
- b) Probar que un conjunto con interior no vacío no puede tener contenido cero. En este caso, ¿podría tener medida cero?
- c) Dar un ejemplo de un conjunto cerrado de medida cero que no tenga contenido cero.
- d) **E.** Si C es un conjunto de contenido cero, probar que la frontera de C tiene contenido cero.
- e) **E.** Dar un ejemplo de un conjunto acotado C de medida cero, tal que la frontera de C no tenga medida cero.
15. **E.** Sea $A = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$, con $a_i < b_i$. Demostrar que A no tiene contenido cero. ¿Podría tener medida cero?
16. **E.** Supongamos que $A \subset [0, 1]$ es la unión de intervalos abiertos (a_i, b_i) tales que cada número racional de $(0, 1)$ está contenido en algún (a_i, b_i) . Si $\sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) < 1$, demuestra que la frontera de A no tiene medida cero.
17. Definamos el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x, y < 1, \quad x, y \in \mathbb{Q}\}$. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f\left(\frac{m}{n}, \frac{p}{q}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{q}$$

donde $(q, p) = 1 = (m, n)$. ¿Es A un conjunto Jordan-medible? ¿Es f integrable sobre A ?

18. a) **E.** Sea R un rectángulo cerrado y acotado en $\mathbb{R}^n$, y sea $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Si f es integrable, demuestra que la gráfica

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid x \in A \quad y = f(x)\}$$

tiene contenido cero.

b) Usa el ejercicio anterior para demostrar que la esfera

$$\mathbb{S}^{n-1} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\} \subset \mathbb{R}^n$$

tiene contenido cero.

19. a) Sea C un conjunto con contenido cero. Demuestra que existe un rectángulo cerrado A tal que $C \subset A$ y $\int_A \chi_C = 0$.
- b) Dar un ejemplo de un conjunto acotado C de medida cero tal que $\int_A \chi_C$ no exista para ningún rectángulo cerrado A que contenga a C .
- c) Si C es un conjunto acotado de medida cero, A un rectángulo que contiene a C y $\int_A \chi_C$ existe, demuestra que $\int_A \chi_C = 0$.
20. **E.** Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $f \geq 0$. Supongamos que $\int_A f = 0$. Demuestra que $\{x \in A \mid f(x) \neq 0\}$ tiene contenido cero.

21. Supongamos que A y B son dos subconjuntos acotados de $\mathbb{R}^n$. Demuestra lo siguiente:

- a) Si $m_J(B) = m_J(A) = 0$, entonces $m_J(A \cup B) = 0$.
- b) Si $B \subset A$ y $m_J(A) = 0$, entonces B es Jordan medible y además $m_J(B) = 0$.

22. Sean A y B dos conjuntos Jordan-medibles.

- a) Demuestra que $A \cup B$ también es Jordan-medible.
- b) Supongamos que $A \cap B$ tiene medida cero, y que f es una función integrable en A y en B . Demuestra que f es integrable en $A \cup B$ y que

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

- c) ¿Qué pasaría si $A \cap B$ no tiene medida cero?
- d) Demuestra que $A \setminus B$ es Jordan-medible y además $m_J(A \setminus B) = m_J(A) - m_J(A \cap B)$.

23. Supongamos que $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable sobre A . Si $A = B \cup C$ y f es integrable sobre $A \setminus B$ y $A \setminus C$, entonces f es integrable sobre B , sobre C y sobre $B \cup C$. Además

$$\int_A f = \int_B f + \int_C f - \int_{B \cap C} f.$$

24. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable sobre el conjunto Jordan-medible A tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in A$.

- a) **E.** Si $x_0 \in \text{int}(A)$ es un punto tal que f es continua en x_0 y $f(x_0) > 0$, demuestra que $\int_A f > 0$.
- b) Sea $B = \{x \in A \mid f(x) > 0\}$. Demuestra que $\int_A f > 0$ si y sólo si $\text{int}(B) \neq \emptyset$.

25. **E.** Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto Jordan-medible. Demuestra que

- a) $m_J(A) > 0$ si y sólo si $\text{int}(A) \neq \emptyset$.
- b) $m_J(A) = 0$ si y sólo si $A \subset \partial A$.
- c) $\text{int}(A) = \emptyset$ es Jordan medible y $m_J(A) = m_J(\text{int}A)$.
- d) Si B es un subconjunto tal que $\text{int}(A) \subset B \subset \overline{A}$, entonces B es Jordan medible y $m_J(B) = m_J(A)$.
26. Supongamos que $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una familia de subconjuntos Jordan-medibles tales que $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ es un conjunto acotado. ¿Serán los conjuntos $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ y $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$ Jordan medibles?
27. **E.** Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto Jordan-medible y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Si $f(x) = 0$ para todo x en $\text{int}(A)$, demuestra que f es integrable sobre A y $\int_A f = 0$.
28. Supongamos que $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable sobre A y $B \subset A$.
- a) ¿Será f integrable sobre B ?
- b) Si f es integrable sobre B , entonces f es integrable sobre $A \setminus B$.
- c) Si f es integrable sobre B y $f(x) \geq 0$ para todo $x \in A$, demuestra que $\int_B f \leq \int_A f$.
29. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ integrable sobre el conjunto Jordan medible A . Llamemos B al conjunto de todos los puntos de A tales que $f(x) \neq 0$. Demuestra que f es integrable sobre B y además $\int_A f = \int_B f$.
30. Demostrar que una función acotada f es continua en a si y sólo si $O(f, a) = 0$.
31. Para cada una de las siguientes funciones, calcula $O(f, x)$ en cada punto x del dominio de la función.
- a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = [x]$.
- b) $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ ó } y \text{ es irracional, } 0 \text{ ó } 1, \\ 1/p, & \text{si } (x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \quad y = q/p, \quad (q, p) = 1. \end{cases}$$

- c) $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } (x, y) \notin \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{si } (x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}. \end{cases}$$

32. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función creciente. Si $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$, demuestra que

$$\sum_{i=1}^n O(f, x_i) \leq f(b) - f(a).$$

33. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función creciente. Demuestra que el conjunto:

$$\{x \in [a, b] \mid f \text{ es discontinua en } x\}$$

tiene medida cero.