Curso de Topología

Sergey A. Antonyan

Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México

Índice general

Parte 1. Topología I 7

Capítulo 1. metricoscorregido 9

Capítulo 2. Espacios Métricos 27
2.1. Métricas 27
2.2. Bolas y conjuntos abiertos 32
2.3. Subespacios Métricos 36
2.4. Producto de Espacios Métricos 36
2.5. Continuidad 37
2.6. Convergencia de suceciones 38
2.7. Espacios normados 40
2.8. Ejercicios del capítulo 42

Capítulo 3. Espacios Topológicos 45
3.1. Espacios Topológicos 45
3.2. Operador Interior 48
3.3. Conjuntos cerrados y operador cerradura 50
3.4. Densidad 56
3.5. Bases 57
3.6. Subbases 62
3.7. Bases locales 65
3.8. Subespacios Topológicos 70
3.9. Ejercicios del capítulo 72

Capítulo 4. Funciones Continuas y Operaciones con Espacios Topológicos 77
4.1. Funciones Continuas 77
4.2. Funciones abiertas y funciones cerradas 81
4.3. Homeomorfismos 83
4.4. Productos finitos de espacios topológicos 86
4.5. Producto de Tychonoff 87
4.6. Producto diagonal infinito de funciones 95
4.7. Espacios Cociente 97
4.8. Ejercicios del capítulo. 102

Capítulo 5. Axiomas de Separación 105
5.1. Axiomas de separación 105
5.2. Lema de Urysohn 114
5.3. Teorema de Tietze-Urysohn 121
5.4. Ejercicios del capítulo 124

Capítulo 6. Espacios Compactos 127
6.1. Espacios Compactos 127
6.2. Teorema de Tychonoff 136
6.3. Compacidad en espacios métricos 139
6.4. Espacios Localmente Compactos 146
6.5. Compactaciones 151
6.6. Ejercicios del capítulo 156

Capítulo 7. Conexidad 159
7.1. Espacios Conexos 159
7.2. Conexidad por trayectorias 166
7.3. Espacios localmente conexos 170
7.4. Ejercicios del capítulo 174

Parte 2. Topología II 177

Capítulo 8. Paracompacidad y Teoremas de Metrizabilidad 179
8.1. Paracompacidad 179
8.2. Particiones de Unidad 183
8.3. El teorema de Stone 185
8.4. El teorema de Nagata-Smirnov 187
8.5. Ejercicios 194

Capítulo 9. Espacio de Funciones 195
9.1. Topología punto-abierta 195
9.2. Topología de la Convergencia Uniforme de funciones 197
9.3. La topología compacto-abierta 204
9.4. k-espacios 224
9.5. Compacidad en Espacios de Funciones 225
9.6. Ejercicios del capítulo 229

Capítulo 10. Acciones de grupos 233
10.1. Acciones de grupos en conjuntos y espacios 233
10.2. Acciones propiamente discontinuas 235

Capítulo 11. Grupo Fundamental 241
11.1. Trayectorias homotópicas 241
11.2. El producto de trayectorias 247

11.3. Grupo Fundamental 251
11.4. Invarianza Homotópica del Grupo fundamental 257
11.5. Espacios cubrientes y levantamientos 258
11.6. El grupo fundamental del círculo y sus aplicaciones 264
11.7. Ejercicios del Capítulo 273

Capítulo 12. Espacios cubrientes 275
12.1. La acción del grupo fundamental en las fibras de un cubriente 275

Capítulo 13. Espacios Cubrientes 277
13.1. Levantamiento de Funciones 282
13.2. Clasificación de espacios cubrientes 287
13.3. El Grupo de Deslizamientos 290
13.4. Acciones de Grupos 292

Índice alfabético 301

Parte 1

Topología I

Capítulo 1

metricoscorregido

1.1 Definiciones y ejemplos

Un espacio métrico es un conjunto en el cual podemos hablar de la distancia de cualesquiera dos elementos. La siguiente definición impone ciertas condiciones naturales a la distancia entre los puntos.

Definición 1.0.1. *Sea X un conjunto diferente del vacío. Una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ se dice que es métrica o función de distancia sobre X si d satisface las siguientes propiedades:*
(i) $d(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in X$ y $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$
(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in X$
(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para todo $x, y, z \in X$. Esta propiedad es conocida como la desigualdad del triángulo.
A la pareja (X, d) se le llama espacio métrico.

Ejemplo 1.0.1. El ejemplo más importante es el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales con la métrica $d(x, y) := |x - y|$. Recordemos que el *valor absoluto* de un número real es:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Observe que:

(1) $$x \leq |x| \text{ y } -x \leq |x| \text{ para } x \in \mathbb{R}.$$

Es fácil ver que d satisface las primeras dos condiciones de una métrica. La desigualdad del triángulo se sigue de la desigualdad de triángulo del valor absoluto:

(2) $$|x + y| \leq |x| + |y| \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

Revisemos rápidamente una prueba tomando la relación de orden sobre $\mathbb{R}$:

Caso 1: Sea $|x+y| = x+y$. Entonces $|x+y| = x+y \leq |x|+|y|$ por (1).
Caso 2: Sea $|x+y| = -(x+y)$. Tenemos $|x+y| = -x-y \leq |x|+|y|$ por (1).

Hemos completado la prueba de la desigualdad del triángulo (2) para el valor absoluto. Además, notemos que la igualdad ocurre en (2) si y sólo si x y y ambos son no negativos o ambos son no positivos. Supongamos que la igual se dá en la desigualdad del triángulo. También supongamos que ocurre el Caso 2. Entonces $|x+y| = -x-y = |x|+|y|$ con lo que tenemos $(|x|+x)+(|y|+y) = 0$. Los términos en el miembro izquierdo de esta ecuación son no negativos por lo que concluimos que $|x| = -x$ y $|y| = -y$. Por lo tanto x y y son no positivos. Con un análisis similar del Caso 1 obtenemos que ambos x y y son no negativos.
Ahora es un asunto sencillo derivar la desigualdad del triángulo para d:

$$
\begin{aligned}
d(x,z) &= |x-z| \\
&= |(x-y)+(y-z)| \\
&\leq |x-y|+|y-z| \quad \text{(por la desigualdad del triángulo para } |\ |) \\
&= d(x,y)+d(y,z).
\end{aligned}
$$

Nos referimos a d como la métrica del valor absoluto.

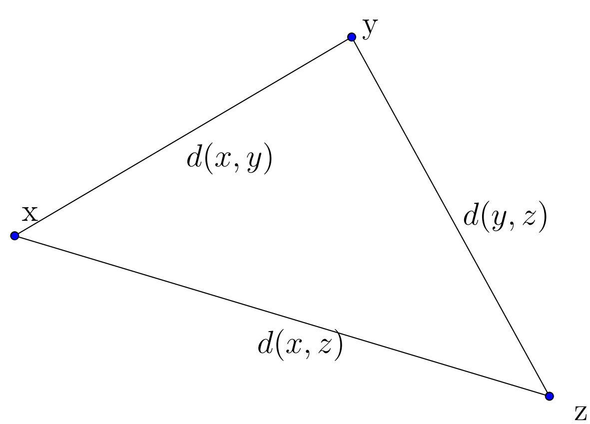


Figura 1.1: Desigualdad del triángulo

Ejercicio 1.0.2. *También podemos probar (2) como sigue: Observemos que $x \leq |x|$ para toda $x \in \mathbb{R}$ y que $|x| = \sqrt{x^2}$, la raíz cuadrada no negativa de x^2. Por lo tanto,*

$$|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \leq |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| = (|x| + |y|)^2.$$

(Usamos el hecho de que $|xy| = |x||y|$ para todo par de números reales x y y en la prueba anterior.) Puesto que $t \to \sqrt{t}$ es creciente en $(0, \infty)$, se sigue el resultado.

Ejercicio 1.0.3. *¿Cuándo se da la igualdad en la desigualdad del triángulo para la métrica del valor absoluto en $\mathbb{R}$? (Véase el teorema (1.0.16) para un caso más general.)*

Ejemplo 1.0.2. Ahora definiremos al valor absoluto de un número complejo y lo usaremos para definir una métrica en $\mathbb{C}$.

Para $z \in \mathbb{C}$, definimos $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ si $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$. Escribimos Re z (respectivamente, Im z) para denotar a la parte real (respectivamente, a la parte imaginaria) de un número complejo.

Observemos los siguientes hechos acerca de la función valor absoluto sobre $\mathbb{C}$:

1. $|z| = |\overline{z}|$ para $z \in \mathbb{C}$.
2. $|z|^2 = z\overline{z}$ para $z \in \mathbb{C}$.
3. Re$z \leq |z|$ y Im$z \leq |z|$ para $z \in \mathbb{C}$.
4. $|zw| = |z||w|$ para $z, w \in \mathbb{C}$
5. Para $z, w \in \mathbb{C}$, tenemos la desigualdad del triángulo: $|z + w| \leq |z| + |w|$.

Dejamos la verificación del 1 al 4 al lector. Probaremos 5. Tenemos:

$$\begin{aligned}
|z+w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)} \\
&= |z|^2 + |w|^2 + z\overline{w} + \overline{z}w \\
&= |z|^2 + |w|^2 + 2\text{Re } z\overline{w} \\
&\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z\overline{w}| \\
&= |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| \\
&= (|z| + |w|)^2
\end{aligned}$$

De aquí se sigue la desigualdad del triángulo.

Dados $z, w \in \mathbb{C}$, definimos $d(z, w) := |z - w|$. Es fácil probar que d es una métrica en $\mathbb{C}$.

Ejemplo 1.0.3. (Métrica Discreta). Sea X un conjunto diferente del vacío. Definimos $d(x,y)=0$ si $x=y$ y $d(x,y)=1$ si $x\neq y$. Dejamos el sencillo ejercicio de probar que d es una métrica sobre X al lector. La métrica d se llama *métrica discreta.*

Ejemplo 1.0.4. Sea $V=\mathbb{R}^n$. Las siguientes son métricas sobre $\mathbb{R}^n$:
(a) $d_1(x,y):=\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|$.
(b) $d_\infty(x,y):=\max\{|x_k-y_k| : 1\leq k\leq n\}$.

Dejamos las sencillas verificaciones de estas métricas al lector. Tendremos que regresar a ellas después desde otra perspectiva. Véase el ejercicio (1.0.17).

En México, la métrica d_1 es conocida como "la métrica del taxista". ¿Puédes ver por qué? Dibuje la retícula de puntos con coordenadas enteras en $\mathbb{R}^2$ y vea cuál es la d_1-distancia entre $(1,2)$ y $(-4,8)$. Véase la figura 1.2.

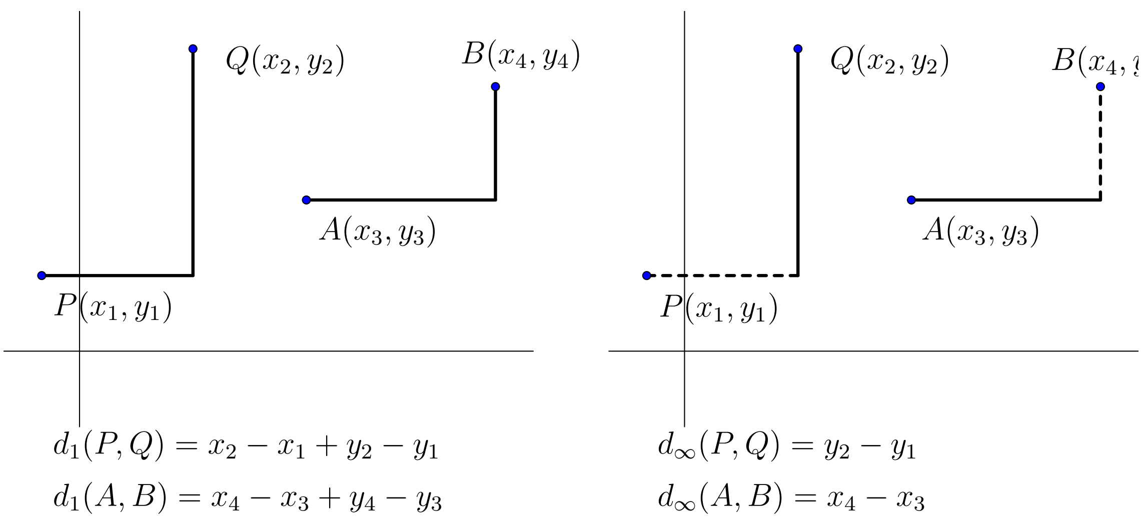


Figura 1.2: Métricas d_1 y d_∞

Definición 1.0.4. *Un producto interno en un espacio vectorial real V es una función*

$$\langle\ ,\ \rangle : V\times V\to\mathbb{R}$$

Que satisface las siguientes propiedades: Para $x, y, z \in V$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$,

(a) $\langle x, x\rangle \geq 0$ *y* $\langle x, x\rangle = 0$ *sí y sólo sí* $x = 0$,

(b) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$,

(c) $\langle x+z, y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle z, y\rangle$ *y* $\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$,

(d) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$.

Al par $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *se le llama espacio con producto interno. Para abreviar, a veces diremos "V es un espacio con producto interno"sin mencionar explicitamente al producto interno* $\langle\ ,\ \rangle$.

Ejemplo 1.0.5. Considere $V = \mathbb{R}^n$. Si $x = (x_1, ..., x_n)$ y $y = (y_1, ..., y_n)$ son elementos de $\mathbb{R}^n$, entonces, su producto punto $\langle x, y\rangle$ (o, $x \cdot y$) se define como $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. Es facil comprobar que el producto punto es un producto interno. El par $(\mathbb{R}, \langle\ ,\ \rangle)$ es conocido como el espacio euclideano n-dimensional.

Definición 1.0.5. *Denotamos por* $\mathscr{C}[0,1]$ *al espacio vectorial de todas las funciones continuas que toman valores reales en el intervalo* $[0,1]$. *Si* $f, g \in \mathscr{C}[0,1]$ *definimos* $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$, *donde la integral es la de Riemann. Note primero que la integral existe (¡Gracias al análisis!). La cosa crucial que hay que mostrar es que* $\langle f, f\rangle = 0$ *si y sólo si* $f = 0$. *Esto se sigue del Lema 1.1.11 de abajo. El resto de las propiedades se siguen de propiedades bien conocidas de la integral (de Riemann). De esta forma,* $(\mathscr{C}[0,1], \langle\ ,\ \rangle)$ *es un espacio con producto interno.*

Lema 1.0.6. *Sea* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *continua con* $f(t) \geq 0$ *para* $t \in [0,1]$. *Entonces* $\int_0^1 f(t)dt = 0$ *si y sólo si* $f(t) = 0$ *para toda* $t \in [0,1]$.

Prueba. Para probar la parte no trivial, supongamos que $\int_0^1 f(t)dt = 0$. Si f no es idénticamente 0, como $f \geq 0$, existe un $t_0 \in [0,1]$ tal que $f(t_0) > 0$. Definamos $\alpha := f(t_0)$ y $\varepsilon := \alpha/2$. Para este valor de ε, por la continuidad de f en t_0, existe un δ tal que $f(t) \in (\frac{\alpha}{2}, \frac{3\alpha}{2})$ para $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$. Usando varias propiedades de la integral, vemos que

$$\int_0^1 f(t)dt \geq \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} f(t)dt \geq \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} \frac{\alpha}{2}dt = \alpha\delta > 0.$$

Lo cual contradice nuestro supuesto de que $\int_0^1 f(t)dt = 0$.

Pregunta: ¿Puede usted mencionar las propiedades de la integral (de Riemann) de las que se deriva la desigualdad dada? $\square$

Nota 1.0.7. *Observe que si asumimos a f no negativa y Riemann-integrable en [0,1] tal que $\int_0^1 f(t)dt = 0$, entonces no podemos concluir que $f = 0$ en* $[0,1]$. *Por ejemplo, considere a la función $f(t) = 0$ si $t \neq 1/2$ y $f(1/2) = 10$. Entonces f es Riemann-integrable en* $[0,1]$ *y* $\int_0^1 f(t)dt = 0$.

Definición 1.0.8. *Sea V un espacio con producto interno. Dado un vector $x \in V$, definimos a la norma o longitud $\|x\|$ (léase la norma de x) asociada al producto interno de V como la raíz cuadrada no negativa de $\langle x, x\rangle$, es decir, $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$.*

Los ejemplos más importantes son los espacios euclideanos. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, definimos el producto interno $\langle x, y\rangle := \sum_{j=i}^n x_j y_j$. Note que cuando $n = 2$, $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la longitud del vector (x, y).

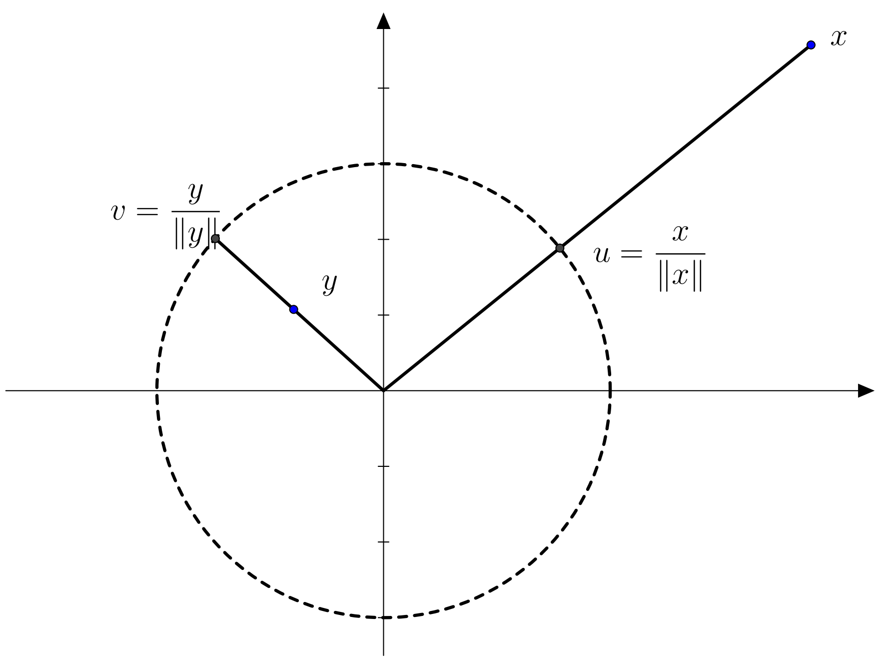


Figura 1.3: Vectores unitarios a lo largo de x e y

Teorema 1.0.9. ***(Desigualdad de Cauchy-Schwarz).*** *Sea V un espacio con producto interno. Entonces tenemos que*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\| \text{ para todo } x, y \in V.$$

La igualdad se da si y sólo si uno de ellos es un múltiplo escalar del otro.

Prueba. Si $x = 0$ o $y = 0$, entonces $\langle x, y\rangle = 0$ y ya sea $\|x\| = 0$ o $\|y\| = 0$. De ahí el resultado. Ahora, considere el caso cuando $\|x\| = \|y\| = 1$. Considere $\langle x - y, x - y\rangle$. Entonces

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle x - y, x - y\rangle &= \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle - 2\langle x, y\rangle \\ &= 2 - 2\langle x, y\rangle \quad \text{pues } \|x\| = \|y\| = 1. \end{aligned}$$

De aquí concluimos que $2 - 2\langle x, y\rangle \geq 0$, es decir $\langle x, y\rangle \leq 1$.
De manera similar $\langle x + y, x + y\rangle \geq 0$ nos lleva a que $-\langle x, y\rangle \leq 1$. Por lo que

$$|\langle x, y\rangle| \leq 1 = \|x\|\|y\|. \tag{3}$$

Ahora probaremos lo dicho respecto a la igualdad. Sea $\|\langle x, y\rangle\| = 1$. Entonces ya sea $\langle x, y\rangle = 1$ o -1. Si $\|\langle x, y\rangle\| = 1$, de la cadena de desigualdades de arriba deducimos que $\|\langle x - y, x - y\rangle\| = 0$ es decir, $x - y = 0$. Si $\|\langle x, y\rangle\| = -1$, vemos que $x + y = 0$. Por lo que la igualdad se da si y sólo si ya sea $x + y = 0$ o $x - y = 0$, que es, si y sólo si $x = \pm y$.

Ahora supongamos que x y y son distintos de cero (no necesariamente de longitud unitaria). Entonces $u = \frac{x}{\|x\|}$ y $v = \frac{y}{\|y\|}$ son de longitud unitaria. Por el cao anterior $\|\langle u, v\rangle\| \leq 1$. Por lo que

$$\left|\left\langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{|y\|}\right\rangle\right| = \left|\frac{1}{\|x\|}\frac{1}{\|y\|}\langle x, y\rangle\right| \leq 1.$$

De aquí obtenemos que $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$.

Si x y y son distintos de cero, entonces la igualdad significa que $\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\|$ o $-\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\|$.

Entonces

$$\begin{aligned} \langle x, y\rangle = \pm\|x\|\|y\| &\Longleftrightarrow \left\langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right\rangle = \pm 1 \\ &\Longleftrightarrow \frac{x}{\|x\|} = \pm\frac{y}{\|y\|} \\ &\Longleftrightarrow x = \pm\frac{\|x\|}{\|y\|}y \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 1.0.10. *La norma $\|\ \|$ asociada a un producto interno en un espacio vectorial V como fue definida anteriormente satisface lo siguiente:*

(i) $\|x\| \geq 0$ *para todo* $x \in V$ *y* $\|x\| = 0$ *si y sólo si* $x = 0$.

(ii)$\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, $x \in V$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$.

(iii)$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *para todo* $x, y \in V$. *(Esta es conocida como la desigualdad del triángulo para la norma.)*

Prueba. Dejamos la prueba del hecho de que la norma satisface las primeras dos condiciones como un sencillo ejercicio. Para probar la desigualdad del triángulo, procedeos como sigue:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + 2\langle x, y\rangle \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Como $x \mapsto x^2$ es una función creciente en $[0, \infty)$, deducimos la desigualdad requerida. $\square$

Definición 1.0.11. *Considere* V *un espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$. *Una norma en* V *es una función* $\| \; \| : V \to \mathbb{R}$ *que satisface las condiciones* $(i) - (iii)$ *enlistadas en el teorema.*

El par $(V, \| \; \|)$ *es llamado espacio lineal normado, o NLS (por sus siglas en inglés) para abreviar.*

Lema 1.0.12. *Dado un NLS* $(V, \| \; \|)$, *definimos* $d(x, y) := \|x - y\|$. *Entonces* d *es una métrica en* V.

Prueba. Mostraremos que d satisface la desigualdad del triángulo.
Escribamos $x - z = (x - y) + (y - z)$ y apliquemos la desigualdad del tríangulo de la norma:

$$\begin{aligned} d(x, z) &= \|x - z\| \\ &= \|(x - y) + (y - z)\| \\ &\leq \|x - y\| + \|y - z\| \\ &= d(x, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

Por lo que d define una métrica en V. $\square$

Nota 1.0.13. *A la métrica definida por* $d(x, y) := \|x - y\|$ *se le denominará como la métrica asociada a la norma* $\| \; \|$. *Todos los conceptos métricos* *de aquí en adelante concernientes a un NLS serán con referencia a esta métrica.*

Ejercicio 1.0.14. *Las métricas inducidas por normas son invariantes bajo traslaciónes:*

$$d(x+z, y+z) = d(x,y) \quad \textit{para } x, y, z \textit{ en un NLS.}$$

El siguiente teorema explica el significado geométrico de el caso en el que la igualdad ocurre en la desigualdad del triángulo en la métrica euclideana estandar en $\mathbb{R}^n$. Esto es típico de los casos de igualdad de muchas desigualdades. Son siempre muy especiales y, más frecuentemente que no, tienen interpretación geométrica. Necesitamos la siguiente definición:

Definición 1.0.15. *Sea V un espacio vectorial real y $x, y, z \in V$. Decimos que el punto z se encuentra entre los puntos x e y si y sólo si existe $t \in \mathbb{R}$, $0 \leq t \leq 1$ tal que $z = tx + (1-t)y$.*

Teorema 1.0.16. *Sea x e y dos puntos en un espacio con producto interno $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ sobre $\mathbb{R}$. Sea $z \in V$. Entonces se da la igualdad en la desigualdad del triángulo $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ si y sólo si el punto z se encuentra entre los puntos x e y.*

Prueba. Sea z que se encuentra entre los puntos x e y, digamos, $z = tx + (1-t)y$ para alguna $t \in [0,1]$. Entonces

$$\begin{aligned} d(x,z) + d(z,y) &= \|x - z\| + \|z - y\| \\ &= \|x - tx - (1-t)y\| + \|tx + (1-t)y - y\| \\ &= \|(1-t)(x-y)\| + \|t(x-y)\|. \end{aligned}$$

Como $t \geq 0$ y $1 - t \geq 0$, se sigue que

$$\begin{aligned} d(x,z) + d(z,y) &= (1-t)\|x-y\| + t\|x-y\| \\ &= \|x-y\| \\ &= d(x,y). \end{aligned}$$

Por el contrario, asumamos que $d(x,y) = d(x,z) + d(z,y)$. Sabemos que $\|x-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\|$. Pero asumimos que la igualdad se da. Por lo que, se sigue de el caso de la igualdad de la desigualdad del triángulo (para la norma inducida por un producto interno) que $x - z = s(z-y)$ para alguna $s \geq 0$. Esto muestra que $(1+s)z = x + sy$ luego, $z = \frac{1}{1+s}x + \frac{s}{1+s}y$. Como $s \geq 0$, notamos que $0 \leq \frac{1}{1+s} \leq 1$. Por lo tanto, $z = tx + (1-t)y$ donde

$t = \frac{1}{1+s}$. Es decir, z se encuentra entre x e y. Esto completa la prueba. $\square$

Ejercicio 1.0.17. *Muestra que las siguientes son normas en $\mathbb{R}^n$:*

(a) $\|x\|_1 := \sum_{k=1}^{n} |x_k|$.

(b) $\|x\|_\infty := max\{|x_k| : 1 \leq k \leq n\}$. Hint : Para probar la desigualdad del triángulo, observe que $|x_j| \leq \|x\|_\infty$ para $x = (x_1, ..., x_j, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

(c) $\|x\|_2 := (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2)^{1/2}$. Esta es la llamada norma euclideana. Es la norma asociada al producto punto en $\mathbb{R}^n$. A partir de aquí, a menos que especifiquemos lo contrario, debemos asumir que $\mathbb{R}^n$ está equipada con esta norma y la métrica inducida por esta norma será denotada por d.

Las métricas inducidas por las normas $\| \|_1$ y $\| \|_\infty$ son respectivamente las métricas d_1 y d_∞ del ejemplo (1.0.4)

Generalizamos estas normas a espacios adecuados de funciones en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.0.6. Sea X un conjunto no vacío. Sea $B(X)$ el conjunto de todas las funciones con valores reales (o complejos) acotadas. Entonces

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in X\}$$

define una norma en $B(X)$. Debemos mostrar que se da la desigualdad del triángulo. Sean $f, g \in B(X)$ y $x \in X$.

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x)| &\leq |f(x)| + |g(x)| \\ &\leq \sup\{|f(t)| : t \in X\} + \sup\{g(t) : t \in X\} \\ &= \|f\|_\infty + \|g\|_\infty. \end{aligned}$$

Por lo que el conjunto de los números reales $\{|f(x) + g(x)| : x \in X\}$ está acorado superiormente por el número real $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. De aquí que el supremo del conjunto, es decir, $\|f + g\|_\infty$, debe ser menor o igual a la cota superior$\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. Definimos a d_∞ como la métrica inducida por esta norma.

Esta es similar a la norma $\| \|_\infty$ en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 1.0.7. Sea $X := [0, 1]$, el intervalo unitario cerrado. Entonces

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)| dt$$

define una norma en el conjunto de todas las funciones continuas con valores reales/complejos en $[0,1]$. Esta es similar a la norma $\| \|_1$ en $\mathbb{R}^n$. Definimos a d_1 como la distancia inducida por esta norma.

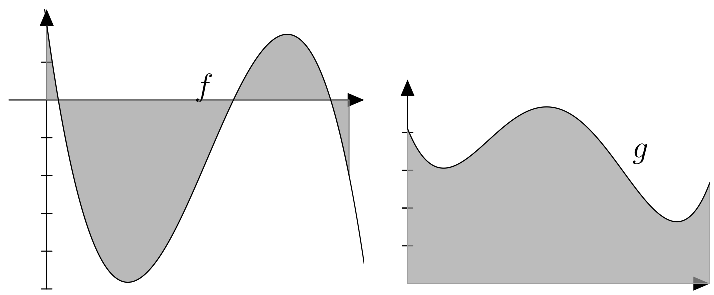


Figura 1.4: Significado geométrico de $\| \|_1$: área de la región sombreada

Aquí el problema principal está en mostrar que si $\|f\|_1 = 0$, entonces $f = 0$ en $[0,1]$. Pero esto ya fue tratado. Vease el lema (1.0.6) La desigualdad del triángulo es sencilla usando las propiedades de la integral de Riemann.

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_1 &= \int_0^1 |f(t)+g(t)|dt \\
&\leq \int_0^1 |f(t)| + |g(t)|dt \\
&= \int_0^1 |f(t)|dt + \int_0^1 |g(t)|dt \\
&= \|f\|_1 + \|g\|_1
\end{aligned}$$

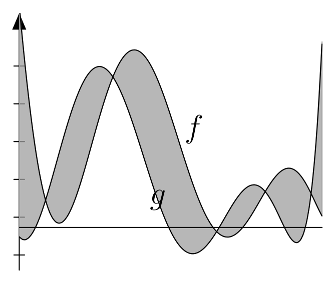


Figura 1.5: El significado geométrico de la métrica d_1: $d_1(f,g)$ es el área de la región sombreada.

El significado geométrico de $\|f\|_1$ se vuelve claro para nosotros si recordamos el significado geométrico de la integral $\int_a^b f(t)dt$ de una función no negativa en un intervalo $[a,b]$. Es el área de la región $x=a$, $x=b$, $y=0$ e

$y = f(x)$. Vease las Figuras 1.4-1.5 donde $a = 0$ y $b = 1$.

Ejercicio 1.0.18. *Sea $X := [0, 1]$, el intervalo unitario cerrado. Entonces*

$$\|f\|_2 := \left(\int_0^1 (|f(t)|)^2 dt \right)^{1/2}$$

define una norma en el conjunto de todas las funciones continuas con valores reales/complejos en $[0, 1]$.

Ejercicio 1.0.19. *Considere las funciones $f(t) := t$ y $g(t) := t^2$ para $t \in [0, 1]$. Calcule $d_1(f, g)$ y $d_\infty(f, g)$.*

Ejercicio 1.0.20. *$V := \mathscr{C}[0, 1]$ denota al espacio vectorial de todas las funciones continuas con valores reales en $[0, 1]$. Muestre que $f \mapsto \|f\|_\infty := sup\{|f(x)| : x \in [0, 1]\}$ es una norma en V. (¿Por qué $\|f\|_\infty$ tiene sentido?)*

Ejercicio 1.0.21. *Sea X el conjunto de todas las sucesiones reales. Nos gustaría pensar que dos puntos (x_n) y (y_n) están cerca el uno del otro si sus primeros N términos son iguales para alguna lngitud N. Mientras mayor sea el entero N, más cerca estarán. Esto es logrado por la siguiente definición de la métrica:*

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & si\ x = y \\ \frac{1}{min\{i : x_i \neq y_i\}} & si\ x \neq y \end{cases}$$

La desigualdad del triángulo $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ ciertamente se da si cualesquiera dos de x, y, z son iguales. Así que asumamos que $x \neq y, y \neq z$ y $z \neq x$. Sea

$$r := min\{i : x_i \neq y_i\}, s := min\{i : y_i \neq z_i\}, t := min\{i : z_i \neq x_i\}.$$

Claramente $t \geq min\{r, s\}$ y por lo tanto $d(x, z) \leq max\{d(x, y), d(y, z)\}$.

Ejercicio 1.0.22. *Sea (X, d) un espacio métrico. Sea $A \subset X$ diferente del vacío. Definamos para $x, y \in A$, $\delta(x, y) := d(x, y)$. Entonces δ es una métrica en A, llamada la métrica inducida en el subconjunto A.*

Ejercicio 1.0.23. *Sea d una métrica en X. Definimos $\delta(x, y) := min\{1, d(x, y)\}$ para toda $x, y \in X$. Prueba que δ es una métrica en X.*

Ejercicio 1.0.24. *Sea (X, d) un espacio métrico. Definimos:*

$$\delta(x,y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}, \text{ para todo } x, y \in X.$$

Pruebe que δ es una métrica en X.

Ejercicio 1.0.25. ***(Métrica del Producto).*** *Sean (X, d_1) y (Y, d_2) espacios métricos. Prueba que:*

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) := \ max\{d_1(x_1,x_2), d_2(y_1,y_2)\}$$

define una métrica en el producto de conjuntos $X \times Y$. Nos referimos a la métrica sobre $X \times Y$ como la métrica del producto.

¿Puedes pensar en otra métrica sobre $X \times Y$ que venga de las métricas originales sobre X y Y?

Ejercicio 1.0.26. *Supongamos que (X, d) y (Y, δ) son espacios métricos. ¿Hay alguna métrica sobre $X \cup Y$ que induzca d sobre X y δ sobre Y? (Suponga que $X \cap Y = \emptyset$).*

Ejercicio 1.0.27. *Denotemos con $M(n, \mathbb{R})$ al conjunto de todas las matrices reales de $n \times n$. Identificamos a cualquier matriz $A = (a_{ij}) \in M(n, \mathbb{R})$ con el vector*

$$(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{n1}, \ldots, a_{nn}) \in \mathbb{R}^{n^2}.$$

Este mapeo es un isomorfismo lineal entre $M(n, \mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^{n^2}$. Usando este isomorfismo lineal, definimos:

$$\|A\| := (\sum_{i,j} |a_{ij}|^2)^{1/2} = \|(a_{11}, \ldots, a_{nn})\|.$$

Por lo tanto $M(n, \mathbb{R})$ es un NLS.

Lema 1.0.28. ***(Desigualdad de Young).*** *Sean x, y números reales no negativos. Sea $p > 1$ y q definidos de tal manera que se cumpla $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces tenemos la siguiente desigualdad conocida como la desigualdad de Young:*

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}. \tag{4}$$

La igualdad se da si y sólo si $x^p = y^q$.

Prueba. La estrategia es la siguiente. Dejemos fija a $y > 0$. Consideremos la función

$$f(x) := \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy \quad \text{para } x > 0.$$

Aplicamos los críterios de máximos y mínimos de cálculo de una variable para llegar a la desigualdad. El lector debería continuar y completar la prueba.

La derivada de f es $f'(x) = x^{p-1} - y$. Por lo tanto el punto crítico, esto es, el punto donde la derivada se anula, está dado por $x_0 = y^{\overline{p-1}}$ con $\frac{1}{}$ arriba: $x_0 = y^{\frac{1}{p-1}}$. Claramente, $f''(x_0) > 0$. Por lo tanto concluimos que $f(x_0) = 0$ es el mínimo de f en $(0, \infty)$ de donde tenemos que $f(x) \geq 0 = f(x_0)$. Esta es la desigualdad que buscamos.

Notemos que nuestro análisis prueba que la igualdad ocurre si y sólo si $x = y^{1/(p-1)}$. Elevando a la potencia p nos lleva a la igualdad buscada. $\square$

Lema 1.0.29. ***(desigualdad de Hölder).*** *Usaremos la letra $\mathbb{K}$ para denotar $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Denotemos con X a $\mathbb{K}^n$ y, para $1 \leq p < \infty$, sea $\|x\|_p := (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$ y para $p = \infty$, sea $\|x\|_\infty := max\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\}$. Para $p > 1$, sea q tal que $1/p + 1/q = 1$. Para $p = 1$ tomaremos $q = \infty$. Tenemos la desigualdad de Hölder:*

$$\sum_i |a_i||b_i| \leq \|a\|_p \|b\|_q, \text{ para todo } a, b \in \mathbb{K}^n. \tag{5}$$

La igualdad se dá si y sólo si $C_1|x_k|^p = C_2|y_k|^q$ para $1 \leq k \leq n$ para algunas constantes diferentes de cero C_1 y C_2.

Prueba: La estrategia es la que sigue. Tomamos $x = \frac{|a_i|}{\|a\|_p}$ e $y = \frac{|b_i|}{\|b|_q}$ en (4) y sumamos sobre i. Ahora, esto es un ejercicio directo para el lector. Si tomamos $x = \frac{|a_i|}{\|a\|_p}$ y $y = \frac{|b_i|}{\|b|_q}$ en (4), tenemos:

$$\frac{1}{p}\frac{|a_i|^p}{\|a\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|b_i|^q}{\|b\|_q^q} \geq \frac{|a_i|}{\|a\|_p}\frac{|b_i|}{\|b|_q} \tag{6}$$

Sumando esto desde $i = 1$ hasta $i = n$, tenemos:

$$\frac{1}{p}\sum_{i=1}^n \frac{|a_i|^p}{\|a\|_p^p} + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^n \frac{|b_i|^q}{\|b\|_q^q} \geq \sum_{i=1}^n (\frac{|a_i|}{\|a\|_p}\frac{|b_i|}{\|b|_q})$$

Simplificando obtenemos

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\geq \frac{1}{\|a\|_p}\frac{1}{\|b\|_q}\sum_{i=1}^{n}|a_i||b_i|.$$

De donde obtenemos la desigualdad.

¿Cuándo se da la igualdad? Avanzando a través de la prueba y recordando cuando la igualdad ocurre en la desigualdad de Young, deducimos que la igualdad ocurre si y sólo si

$$\frac{|x_k|^p}{\|x\|_p}=\frac{|y_k|^q}{\|y\|_q}\Longleftrightarrow C_1|x_k|^p=C_2|y_k|^q \text{ para } 1\leq k\leq n,$$

para algunas constantes diferentes de cero C_1, C_2. □

Lema 1.0.30. ***(Desigualdad de Minkowski.)*** *Sea $1 \leq p \leq \infty$. Tenemos la desigualdad de Minkowski:*

$$\|a+b\|_p \leq \|a\|_p+\|b\|_p \quad \textit{para } a,b\in\mathbb{K}^n. \tag{7}$$

La igualdad ocurre si y sólo si existen constante C_1, C_2 tales que $C_1 a = C_2 b$.

Prueba. La prueba ya se vio si $p=\infty$. Por lo tanto asumimos que $1\leq p<\infty$. Los casos cuando $a=0$ o $b=0$ son obvios por lo que suponemos que ninguno de ellos es cero.

Comenzamos la prueba con una sugerencia y se deja al lector completar la prueba por su cuenta. Para $1<p<\infty$, observemos:

$$\begin{aligned}\sum_i |a_i+b_i|^p &= \sum_1 |a_i+b_i||a_i+b_i|^{p-1}\\ &\leq \sum_i |a_i||a_i+b_i|^{p-1}+\sum_i |b_i||a_i+b_i|^{p-1}\end{aligned} \tag{8}$$

Aplicamos la desigualdad de Hölder a cada uno de los sumandos.

Ahora concluyamos el argumento completo. Observemos ciertas relaciones entre p y q. Como $1/p+1/q=1$, tenemos que $p=q(p-1)$ y $1/q=(p-1)/p$. Lo usaremos a continuación.

Consideremos el término $\sum_{i=1}^{n}|a_i||a_i+b_i|^{p-1}$. Si aplicamos (5) a esta suma, tenemos

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |a_i||a_i+b_i|^{p-1} &\le \|a\|_p \left[\sum_{i=1}^{n} \left(|a_i+b_i|^{p-1}\right)^q\right]^{1/q} \\
&= \|a\|_p \left[\sum_{i=1}^{n} |a_i+b_i|^{q(p-1)}\right]^{1/q} \\
&= \|a\|_p \sum_{i=1}^{n} |a_i+b_i|^{p/q} \\
&= \|a\|_p \|(a+b)\|_p^{p/q}
\end{aligned} \tag{9}
$$

De manera similar para el otro término tenemos:

$$
\sum_{i=1}^{n} |b_i||a_i+b_i|^{p-1} \le \|b\|_p \|(a+b)\|_p^{p/q} \tag{10}
$$

De $(1{,}8) - (1{,}10)$, tenemos:

$$
\|a+b\|_p^p \le \|a\|_p \|a+b\|_p^{p/q} + \|b\|_p \|a+b\|_p^{p/q}
$$

Dividiendo ambos lados de la desigualdad por el número positivo $\|a+b\|_p^{p/q}$ y usando el hecho de que $p-(p/q) = p(1-1/q) = 1$ se tiene la desigualdad de Minkowski.

El caso de la igualdad se deja al lector. □

Ejemplo 1.0.8. (Espacios de Sucesiones). Sea $1 \le p < \infty$. Definamos ℓ_p de la manera siguiente:

$$
\ell_p := \{(a_n)_{n=1}^{\infty} : a_n \in \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}, \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty\}.
$$

Y ℓ_∞ representa a $(B(\mathbb{N}), \| \; \|_\infty)$. Como ya nos hemos ocupado de $p = \infty$ en el ejemplo (1.0.6), debemos concentrarnos en el caso cuando $1 \le p < \infty$.

Primero que nada mostramos que ℓ_p es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$, que puede ser el caso). Sea $x = (x_n) \in \ell_p$ y a un escalar. Entonces $ax = (ax_n)$. Claramente, $\sum_{n=1}^{\infty} |ax_n|^p = |a|^p \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$. Por lo tanto, $ax \in \ell_p$. Sea $x = (x_n)$ y $y = (y_n) \in \ell_p$. Entonces, debemos mostrar que $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p < \infty$. Este es un argumento interesante y va como sigue.

Sea $\|x\|_p := (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p)^{1/p}$. Entonces, usando la desigualdad de Minkowski (7), deducimos que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{1/p}$$
$$\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^p\right)^{1/p}$$

Como la desigualdad de arriba es cierta para toda n, se sigue que

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k+y_k|^p\right)^{1/p} \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Consecuentemente, elevando a la p, obtenemos

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k+y_k|^p \leq \left(\|x\|_p + \|y\|_p\right)^p.$$

Hemos probado entonces que ℓ_p es un espacio vectorial así como hemos establecido que $(a_n) \mapsto \|(a_n)\|_p := (\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p)^{1/p}$ es una norma en ℓ_p. Entonces $(\ell_p, \|\ \|_p)$ es un espacio vectoriall normado.

Ejercicio 1.0.31. ***(Una desigualdad importante).*** *En un cualquier espacio métrico* (X,d), *muestre que* $|d(x,z)-d(y,z)| \leq d(x,y)|$.

En un NLS $(X, \|\ \|)$, *tenemos que* $|\|x\|-\|y\|| \leq \|x-y\|$ *para cualesquiera dos vectores* $x, y \in X$.

Capítulo 2

Espacios Métricos

Muchas nociones importantes de la topología fueron previamente desarrolladas en espacios métricos. Es por esta razón que comenzaremos estudiando algunas de las caracteríasticas fundamentales de los espacios métricos. El concepto de espacio métrico fue introducido por el matemático francés M. Frechét en 1906 y juega un papel excepcionalmente importante en todas las ramas de la matemática.

Un espacio métrico es un conjunto donde se tiene una noción de *distancia* entre sus puntos, noción que a su vez da cabida a conceptos como la convergencia y la continuidad. En este primer capítulo estudiaremos propiedades básicas de los espacios métricos y hallaremos una manera de definir la continuidad de funciones entre espacios métricos sin involucrar explícitamente sus métricas. Esta caracterización nos servirá más adelante como definición en el entorno más abstracto de los espacios topológicos, objetos centrales de este texto.

2.1. Métricas

Una métrica es simplemente la formalización de la noción de distancia ordinaria, como se verá en la siguiente definición.

Definición 2.1.1. *Sea X un conjunto no vacío. Una función $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ se llama **métrica** o distancia, si para cualesquiera puntos $x, y, z \in X$ se satisfacen los siguientes axiomas:*

1. $\rho(x, y) \geq 0$ *y* $\rho(x, y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$,
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ *(esta desigualdad se conoce como desigualdad del triángulo).*

*El par (X, ρ) recibe el nombre de **espacio métrico**. El número $\rho(x, y)$ suele llamarse distancia entre los puntos x y y.*

A continuación veremos algunos ejemplos de espacios métricos que ilustrarán la definición anterior.

La recta real $\mathbb{R}$ 2.1.1. La función $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\rho(x, y) = |x-y|$ es una métrica para el conkunto de los números reales $\mathbb{R}$, y se le conoce como métrica usual o métrica euclidiana.

De aquí en adelante, cada vez que hablemos de *la recta real* nos estaremos refiriendo al espacio métrico $(\mathbb{R}, \rho)$ del ejemplo anterior.

Ejemplo 2.1.2. En $X = \mathbb{R}^n$ pueden definirse varias métricas, estas son algunas de las más usuales:

1. $\rho_1(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$,
2. $\rho_2(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$,
3. $\rho_3(x, y) = \text{máx}\{|y_i - x_i|\}_{i=1}^{n}$,

en donde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

La métrica ρ_1 es la métrica usual o **euclidiana** y la métrica ρ_3 es llamada **métrica del supremo**. Por otro lado, a ρ_2 se le conoce en los cursos de cálculo y análisis como **métrica del taxista**.

Demostremos un lema que nos será útil para verificar que la función 1 del ejemplo2.1.2 efectivamente es una métrica para $\mathbb{R}^n$

Lema 2.1.2 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)**.** *Sean $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ números reales arbitrarios. Entonces se satisface la siguiente desigualdad*

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i)\Big)^2 \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big).$$

*Además la igualdad ocurre si y sólo si existe un número real λ tal que $x_i = \lambda y_i$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. Esta desigualdad es conocida como **desigualdad de Cauchy-Schwarz**.*

Demostración. Supongamos que existe un real λ tal que $x_i = \lambda y_i$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i)\Big)^2 = \Big(\sum_{i=1}^{n}(\lambda y_i^2)\Big)^2 = \Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda^2 y_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big) = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big).$$

Ahora supongamos que no existe ningún número λ tal que $x_i = \lambda y_i$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \lambda y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2\lambda x_i y_i + \lambda^2 y_i^2) > 0.$$

Es decir,

$$\lambda^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0.$$

Consideremos el polinomio con variable λ, $P(\lambda)$, dado por

$$P(\lambda) = \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + 2\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Entonces $P(\lambda)$ es un polinomio cuadrático sin raíces reales. Así, su discriminante es negativo y por lo tanto

$$\Big(- 2 \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \Big)^2 - 4 \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i \Big) \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i \Big) < 0.$$

Consecuentemente,

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} (x_i y_i) \Big)^2 < \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Big) \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \Big),$$

como se quería demostrar. $\square$

Veamos ahora que las funciones definidas en el ejemplo 2.1.2 son métricas para $\mathbb{R}^n$

DEMOSTRACIÓN.

1. Es fácil ver que la función ρ_1 satisface los axiomas 1 y 2 de la definición 2.1.1. Demostraremos únicamente que se cumple la desigualdad del triángulo. Sean $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ y $z = (z_1, \ldots, z_n)$ tres puntos arbitrarios en $\mathbb{R}^n$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz sabemos que

$$\big(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)(y_i - z_i) \big)^2 \leq \big(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \big) \big(\sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)^2 \big).$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
\rho_1(x,z)^2 &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i + y_i - z_i)^2\\
&= \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)(y_i - z_i) + \sum_{i=1}^{n}(y_i - z_i)^2\\
&\leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 + 2\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i - z_i)^2\right)} + \sum_{i=1}^{n}(y_i - z_i)^2\\
&= \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - z_i)^2}\right)^2\\
&= \big(\rho_1(x,y) + \rho_1(y,z)\big)^2.
\end{aligned}
$$

De donde se sigue inmediatamente que $\rho_1(x,z) \leq \rho_1(x,y) + \rho_1(y,z)$.

2. Evidentemente, la función ρ_2 satisface las condiciones 1 y 2 de la definición 2.1.1, por lo que sólo resta demostrar la desigualdad del triángulo. Sean x, y y z puntos en $\mathbb{R}^n$. Por la desigualdad del triángulo para números reales,

$$|x_i - y_i + y_i - z_i| \leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i|.$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
\rho_2(x,z) = \sum_{i=1}^{n} \mid x_i - z_i \mid &= \sum_{i=1}^{n} \mid x_i - y_i + y_i - z_i \mid\\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \mid x_i - y_i \mid + \sum_{i=1}^{n} \mid y_i - z_i \mid = \rho_2(x,y) + \rho_2(y,z),
\end{aligned}
$$

el resultado buscado.

3. Es fácil ver que $\rho_3(x,y) \geq 0$ para cualesquiera x y y en $\mathbb{R}^n$. Por otro lado, $\rho_3(x,y) = 0$ siempre y cuando cada $|x_i - y_i| = 0$ para toda $i \in \{1,\ldots,n\}$; pero esto sucede si y sólo si $x_i = y_i$ para toda $i \in \{1,\ldots,n\}$, es decir, si y solo si $x = y$.

Evidentemente ρ_3 cumple el requisito 2 de la definición 2.1.1, por lo que únicamente faltaría ver que se cumple la desigualdad del triángulo. Primero observemos que para cualquier $j \in \{1,\ldots,n\}$, se tiene que

$$|x_j - y_j| \leq \text{máx}\{|x_i - y_i|\}_{i=1}^{n}$$

y

$$|y_j - z_j| \leq \max\{|y_i - z_i|\}_{i=1}^n.$$

De esta manera,

$$\max\{|x_i - y_i|\}_{i=1}^n + \max\{|y_i - z_i|\}_{i=1}^n \geq |x_j - y_j| + |y_j - z_j| \geq |x_j - y_j|,$$

de donde se sigue inmediatamente que

$$\max\{|x_i - y_i|\}_{i=1}^n + \max\{|y_i - z_i|\}_{i=1}^n \geq \max\{|x_i - z_i|\}_{i=1}^n.$$

Así, podemos concluir que $\rho_3(x, z) \leq \rho_3(x, y) + \rho_3(y, z)$.

□

Ejemplo 2.1.3. En cualquier conjunto no vacío X, se puede definir una métrica de la siguiente manera:

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \neq y \\ 0, & \text{si } x = y \end{cases}$$

Dicha métrica se llama **métrica discreta**, y el espacio (X, d) recibe el nombre de **espacio discreto**.

Demostración. Los axiomas 1 y 2 se siguen directamente de la definición. Para completar la prueba debemos demostrar que $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

En efecto, si x,y y z son tres puntos de X, tenemos los siguientes casos:

Caso 1. Si $x = z$, entonces $d(x, z) = 0 \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Caso 2. Si $x \neq z$, entondes $d(x, z) = 1$. Es claro que por lo menos uno de los puntos x y z es diferente de y, lo cual implica que por lo menos uno de los números $d(x, y)$ y $d(y, z)$ es igual a 1. Consecuentemente

$$d(x, z) = 1 \leq d(x, y) + d(y, z).$$

□

Definición 2.1.3. *Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Se define el* ***diámetro*** *de A, como*

$$\operatorname{diam} A = \sup\{d(a, a') \mid a, a' \in A\}.$$

2.2. Bolas y conjuntos abiertos

Definición 2.2.1. *Sean (X, d) un espacio métrico, $a \in X$ un punto fijo y r un real positivo. La* ***bola abierta*** *con centro en a y radio r es el siguiente subconjunto de X:*

$$B(a, r) = \{x \in X \mid d(x, a) < r\}.$$

Análogamente, la ***bola cerrada*** *con centro en a y radio r es el siguiente subconjunto de X:*

$$B[a, r] = \{x \in X \mid d(x, a) \leq r\}.$$

Por otro lado, la ***esfera*** *con centro en a y radio r es el subconjunto*

$$S(a, r) = \{x \in X \mid d(x, a) = r\}.$$

Ejemplo 2.2.1. Consideremos la recta real $\mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$ un punto arbitrario. Entonces

$$B(a, r) = (a - r, a + r)$$

y

$$B[a, r] = [a - r, a + r].$$

Ejemplo 2.2.2. Consideremos el espacio métrico $(\mathbb{R}^2, \rho_1)$, donde ρ_1 es la métrica euclidiana del Ejemplo 2.1.2. Entonces, la bola con centro en $\bar{0} = (0, 0)$ y radio 1, es el conjunto

$$B(\bar{0}, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} < 1\}.$$

Geométricamente, dicho conjunto coincide con el interior del disco unitario, como se ilustra en la siguiente figura.

Ejemplo 2.2.3. Consideremos el espacio métrico $(\mathbb{R}^2, \rho_2)$, donde ρ_2 es la metrica definida en el Ejemplo 2.1.2. Entonces, la bola con centro en $\bar{0} = (0, 0)$ y radio 1, es el conjunto dado por

$$B(\bar{0}, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| < 1\}.$$

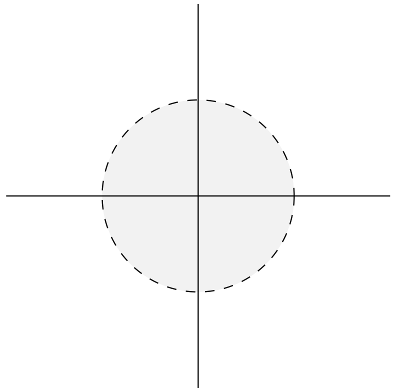


Figura 1. Bola abierta con la métrica usual de $\mathbb{R}^2$

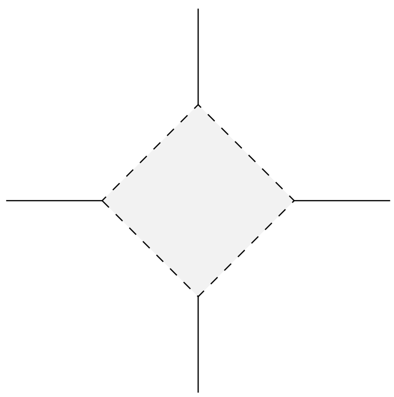


Figura 2. Bola abierta con la métrica citadina de $\mathbb{R}^2$

Ejemplo 2.2.4. Consideremos el espacio métrico $(\mathbb{R}^2, \rho_3)$, con ρ_3 la métrica definida en el Ejemplo 2.1.2. Entonces, la bola abierta con centro en $\bar{0} = (0,0)$ y radio 1, es el conjunto

$$B(\bar{0}, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \text{máx}\{|x|, |y|\} \leq 1\}.$$

Ejemplo 2.2.5. Sean (X, d) es un espacio métrico discreto, $x \in X$ y $r > 0$. Entonces, si $r < 1$,

$$B(x, r) = \{x\}.$$

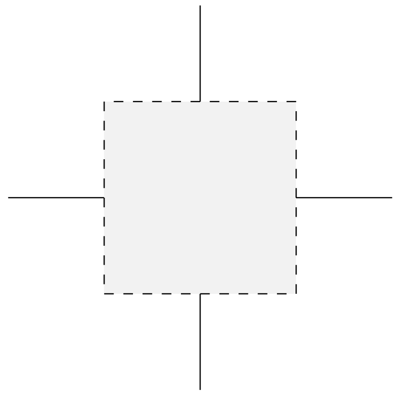


FIGURA 3. Bola abierta con la métrica del supremo de $\mathbb{R}^2$

Por otro lado, si $r \geq 1$, entonces

$$B(x, r) = X.$$

A continuación, introduciremos la noción central para el estudio de la topología: los conjuntos abiertos de un espacio métrico.

Definición 2.2.2. *Sean (X, d) un espacio métrico, A un subconjunto de X y $x \in A$. Se dice que x es **punto interior de** A, si existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$. El conjunto de todos los puntos interiores de A se denota por $Int\ A$. Es evidente que $Int\ A \subset A$ para todo subconjunto A de X.*

*Diremos que A es un **conjunto abierto** en X si para cada $x \in A$, x es **punto interior** de A. En otras palabras, A es abierto si $A = Int\ A$. Por otro lado, diremos que A es un **conjunto cerrado** en X si $X \setminus A$ es abierto.*

Proposición 2.2.3. *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces para todo $x \in X$ y $r > 0$, la bola abierta $B(x, r)$ es un conjunto abierto en X.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $y \in B(x, r)$. Definamos r' por

$$r' = r - d(y, x).$$

Como $d(y, x) < r$, es claro que $r' > 0$. Consideremos $z \in B(y, r')$. Entonces $d(z, y) < r'$, y por tanto

$$d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < r' + d(y, x) = r - d(y, x) + d(y, x) = r$$

Así, podemos concluir que $z \in B(x,r)$, de donde $B(y,r') \subset B(x,r)$. De este modo, tenemos que y es punto interior de $B(x,r)$ y por lo tanto $B(x,r)$ es abierto en X. $\square$

Teorema 2.2.4. *Sea (X,d) un espacio métrico, entonces*

1. *$X, \emptyset$ son conjuntos abiertos.*
2. *Si $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ es una familia arbitraria de conjuntos abiertos en X, entonces $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha$ es un conjunto abierto en X.*
3. *Si $U, V \subset X$ son conjuntos abiertos en X, entonces $U \cap V$ es un conjunto abierto en X.*

Demostración.

1. Claramente X es abierto, ya que para cualesquiera $x \in X$ y $r > 0$, $B(x,r) \subset X$, por lo que todo punto en X es punto interior. Por otro lado, $\emptyset$ es abierto por vacuidad.
2. Sea $\{U\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una familia arbitraria de abiertos, entonces para toda $x \in \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha$ existe α_0 tal que $x \in U_{\alpha_0}$. Como U_{α_0} es abierto en X, existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset U_{\alpha_0}$, por lo tanto $B(x,r) \subset \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha$, implicando que x es punto interior de $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha$. Así $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$ está constituído en su totalidad de puntos interiores, y por tanto es un conjunto abierto de X.
3. Sean U y V abiertos y $x \in U \cap V$. Como $x \in U$, existe $r_1 > 0$ tal que $B(x,r_1) \subset U$. Análogamente, como $x \in V$, existe $r_2 > 0$ tal que $B(x,r_2) \subset V$. Sea $r = \min\{r_1, r_2\}$, entonces $B(x,r) \subset U$ y $B(x,r) \subset V$, por lo que $B(x,r) \subset U \cap V$. Así, x es punto interior de $U \cap V$, y por tanto este conjunto es abierto.

$\square$

Corolario 2.2.5. *Si X es un espacio métrico entonces X y $\emptyset$ son subconjuntos abiertos y cerrados.*

Corolario 2.2.6. *Si $U_1, \ldots, U_n \subset X$ son subconjuntos abiertos de un espacio métrico X, entonces $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ es un subconjunto abierto en X.*

Como se vió en el corolario 2.2.6, la intersección finita de conjuntos abiertos es abierta. Sin embargo, la intersección infinita de abiertos, no necesariamente es abierta, como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.6. Sean $\mathbb{R}$ la recta real, $U_n = (\frac{-1}{n}, \frac{1}{n})$ y $V_n = (n, \infty)$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, U_n y V_n son subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$. Por un lado $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \emptyset$ que es abierto en $\mathbb{R}$. Sin embargo $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \{0\}$, el cual no es un conjunto abierto de $\mathbb{R}$.

Ejemplo 2.2.7. Si X es un espacio métrico discreto, entonces cualquier subconjunto U de X es abierto en X.

2.3. Subespacios Métricos

Es fácil ver que para cualquier subconjunto A de un espacio métrico (X, d), la restricción de la métrica d al subconjunto A define una métrica en A. Así llegamos a la siguiente definición.

Definición 2.3.1. *Sean (X, d) un espacio métrico no vacío, $A \subset X$ y $d|_{A\times A} : A \times A \to \mathbb{R}$ la restricción de la métrica d al conjunto A. Entonces la pareja $(A, d|_{A\times A})$ recibe el nombre de **subespacio métrico** de (X, d).*

Es claro que todo subespacio métrico es a su vez un espacio métrico.

Ejemplos 2.3.1. Sea $(\mathbb{R}^n, \rho_1)$ como en el Ejemplo 2.1.2. Los siguientes son algunos subespacios importantes.

1. La bola unitaria definida por
$$\mathbb{B}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 < 1\}.$$
2. La esfera de dimensión $n - 1$, dada por
$$\mathbb{S}^{n-1} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \ x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}.$$
3. El cubo unitario dado por
$$I^n = \{x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_i \leq 1 \ i = 1, \ldots, n\}.$$

2.4. Producto de Espacios Métricos

Proposición 2.4.1. *Sea $\{(X_i, d_i)\}$ una colección finita de espacios métricos. Definamos*
$$X = \prod_{i=1}^{n} X_i = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in X_i, \ i = 1, \ldots, n\}.$$
La función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ dada por
$$d(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{d_1^2(x_1, y_1) + \cdots + d_n^2(x_n, y_n)}.$$

es una métrica en X, por lo que (X, d) es un espacio métrico

La demostración es análoga a la del Ejemplo 2.1.2. El espacio (X, d) de la proposición anterior se llama **producto de espacios métricos**. Hay otras métricas que se les suele dar al espacio X. Algunas de las más comunes son las siguientes

1. $\hat{d} : X \times X \to \mathbb{R}$ dada por
$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i).$$
2. $\tilde{d} : X \times X \to \mathbb{R}$ dada por
$$d(x, y) = \text{máx}\{d_i(x_i, y_i)\}_{i=1,\ldots,n}.$$

2.5. Continuidad

Uno de los aspectos que más va a llamar nuestro interés es la noción de continuidad de una función entre dos espacios. El estudio de estas funciones es de suma importancia para esta materia.

Definición 2.5.1. *Sea $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ una función entre dos espacios métricos. Se dice que f es continua en el punto $x_0 \in X$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ siempre que $d(x, x_0) < \delta$. Diremos que f es continua en X, si es continua en cualquier punto $x_0 \in X$.*

En otras palabras, diremos que una función $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ entre dos espacios métricos es continua si para toda $x \in X$ y para toda $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$.

Cuando los espacios (X, d) y (Y, ρ) coinciden con la recta real, entonces la definición anterior coincide con la definición usual de continuidad que se estudia en los cursos de cálculo.

Es importante observar que dependiendo de las métricas d y ρ una misma función puede ser continua o no. Por ejemplo, si consideramos los espacios $(\mathbb{R}, d)$ y $(\mathbb{R}, \rho)$, donde d denota la métrica discreta y ρ la métrica usual, entonces la función identidad $Id : (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, \rho)$ es continua,en tanto que la misma función $Id : (\mathbb{R}, \rho) \to (\mathbb{R}, d)$ no lo es.

Teorema 2.5.2. *Sean (X, d) y (Y, ρ) dos espacios métricos y $f : X \to Y$ una función. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *f es continua.*
2. *Para toda $y \in Y$ y para toda $\varepsilon > 0$, $f^{-1}(B(y, \varepsilon))$ es abierto en X.*
3. *Para cualquier abierto $U \subset Y$, $f^{-1}(U)$ es abierto en X.*

Demostración.

$(1 \Rightarrow 2)$. Sea $y \in Y$ y $\varepsilon > 0$. Consideremos $z \in f^{-1}(B(y,\varepsilon))$, entonces $f(z) \in B(y,\varepsilon)$. Como $B(y,\varepsilon)$ es un conjunto abierto, existe $\eta > 0$ tal que $B(f(z),\eta) \subset B(y,\varepsilon)$. Aplicando la continuidad de f podemos encontrar $\delta > 0$, tal que $f(B(z,\delta)) \subset B(f(z),\eta)$. Así, podemos concluir que $B(z,\delta) \subset f^{-1}(B(f(z),\eta)) \subset f^{-1}(B(y,\varepsilon))$, y por tanto $f^{-1}(B(y,\varepsilon))$ es abierto en X.

$(2 \Rightarrow 3)$. Sea U abierto en Y y $z \in f^{-1}(U)$. Demostraremos que z es punto interior de $f^{-1}(U)$. Notemos que $f(z) \in U$ y por ser U abierto existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(z),\varepsilon) \subset U$. Por hipótesis $f^{-1}(B(f(z),\eta))$ es abierto en X, entonces, existe $\delta > 0$ tal que

$$B(z,\delta) \subset f^{-1}(B(f(z),\varepsilon)).$$

Pero $f^{-1}(B(f(z),\varepsilon))$ está contenido en $f^{-1}(U)$, por lo que $B(z,\delta) \subset f^{-1}(U)$, y por lo tanto z es punto interior de $f^{-1}(U)$.

$(3 \Rightarrow 1)$. Sean $x_0 \in X$, y $\varepsilon > 0$. Entonces $B(f(x_0),\varepsilon)$ es un abierto en Y y por hipótesis $f^{-1}(B(f(x_0),\varepsilon))$ es abierto en X. Como x_0 pertenece a $f^{-1}(B(f(x_0),\varepsilon))$, existe $\delta > 0$ tal que

$$B(x_0,\delta) \subset f^{-1}(B(f(x_0),\varepsilon)).$$

Así, $f(B(x_0,\delta)) \subset B(f(x_o),\varepsilon)$, por lo que f es continua.

$\square$

2.6. Convergencia de suceciones

Definición 2.6.1. *Sean (X,d) un espacio métrico y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$* ***converge*** *al punto x, si para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $d(x_n,x) < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$.*

En la literatura la convergencia de una suseción $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a un punto x, se suele denotar por $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ o por $x_n \to x$.

Proposición 2.6.2. *Sea (X,d) un espacio métrico y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Entonces, $x_n \to x$ si y sólo si $d(x_n,x) \to 0$.*

La demostración es inmediata.

En los espacios métricos discretos, las sucesiones convergentes tienen una forma muy particular como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.6.1. Sea (X,d) un espacio métrico discreto. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X que converge a un punto x, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para toda $n \geq n_0$, $x_n = x$.

En efecto, si $\varepsilon < 1$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, $x_n \in B(x,\varepsilon)$. Pero por el Ejemplo 2.2.5, $B(x,\varepsilon) = \{x\}$, por lo que $x_n = x$, para todo $n \geq n_0$.

Proposición 2.6.3. *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces toda sucesión convergente tiene un sólo límite.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Si x y y son dos puntos en X tales que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = y$. Supongamos que $x \neq y$. Entonces $d(x, y) > 0$, por lo que $\varepsilon = \frac{d(x,y)}{2} > 0$. Además, es claro que $B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon) = \emptyset$.

Como (x_n) converge a x, existe n_1 tal que si $n \geq n_1$, entonces $x_n \in B(x, \varepsilon)$. Análogamente, existe n_2 tal que si $n \geq n_2$, entonces $x_n \in B(y, \varepsilon)$. Sea $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, entonces, si $n \geq n_0$, $x_n \in B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon)$ lo cual es una evidente contradicción. Por lo tanto $x = y$. □

Las sucesiones juegan un papel determinante en la continuidad de las funciones entre espacios métricos. El siguiente teorema nos dice porqué.

Teorema 2.6.4. *Sean (X, d) y (Y, ρ) dos espacios métricos. Una función $f : X \to Y$ es continua en $x_0 \in X$ si y sólo si, para cualquier sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converja a x_0 la sucesión $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x_0)$.*

Demostración. Primero demostraremos la parte *si*. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X convergente al punto $x_0 \in X$. Por la continuidad de f, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in B(x_0, \delta)$, entonces $f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon)$. Como x_n converge a x_0, podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $x_n \in B(x_0, \delta)$ para todo $n \geq n_0$. Luego $f(x_n) \in B(f(x_0), \varepsilon)$ para todo $n \geq n_0$, lo cual demuestra que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x_0)$.

Ahora demostraremos la parte *sólo si*. Demostraremos que f es continua por contradicción. Supongamos que existe $\varepsilon_0 > 0$, tal que para toda $\delta > 0$, existe $x \in B(x_0, \delta)$ tal que $x \notin B(f(x_0), \varepsilon_0)$. Construiremos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X tal que $x_n \to x_0$, pero de manera que la sucesión $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ no converja a $f(x_0)$.

Para $\delta_1 = 1$, escojamos $x_1 \in B(x_0, 1)$ tal que $f(x_1) \notin B(f(x_0), \varepsilon_0)$. Análogamente, para $\delta_2 = \frac{1}{2}$, escojamos $x_2 \in B(x_0, \frac{1}{2})$ tal que $f(x_n) \notin B(f(x_0), \varepsilon_0)$. Así, para $\delta_n = \frac{1}{n}$ podemos escoger $x_n \in B(x_0, \frac{1}{n})$ tal que $f(x_n) \notin B(f(x_0), \frac{1}{n})$. Claramente, la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x_0. Pero la construcción nos grantiza que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a $f(x_0)$, contradiciendo la hipótesis. Por lo tanto, f es continua en x_0, como se quería demostrar.

□

2.7. Espacios normados

A continuación introduciremos un tipo de espacios métricos que por sus carácteristicas geométricas merecen ser tratados por separado.

Definición 2.7.1. *Sea X un espacio lineal (sobre $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$). Una* ***norma*** *es una función $\|\cdot\|$: $X \to \mathbb{R}$ la cual satisface los siguientes axiomas:*

1. *$\|x\| \geq 0$. Además $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$,*
2. *$\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$,*
3. *$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$,*

donde $x, y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. El par $(X, \|\cdot\|)$ recibe el nombre de ***espacio lineal normado****.*

Proposición 2.7.2. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio lineal normado. Definamos la función $d : X \times X \to \mathbb{R}$, por $d(x,y) = \|x-y\|$. Entonces, d es una métrica en X.*

Demostración. Se sigue de la definición de norma que siempre $d(x,y) \geq 0$ y $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x - y = 0$, lo cual sucede siempre y cuando $x = y$. Por otro lado,

$$d(x,y) = |x-y\| = \|-(y-x)\| = |-1|\|y-x\| = \|y-x\| = d(y,x).$$

Para completar la demostración, sólo resta verificar la desigualdad del triángulo. Para ello tomemos tres puntos $x, y, z \in X$. Entonces

$$d(x,z) = \|x-z\| = \|x-y+y-z\| \leq \|x-y\| + \|y-z\| = d(x,y) + d(y,z).$$

Así, podemos concluir que d es una métrica. □

Se sigue de la proposición anterior que todos los espacios normados son a su vez espacios métricos. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.7.1. Sea X un conjunto no vacío. Consideremos el conjunto de todas las funciones acotadas de X en $\mathbb{R}$, denotado por $B(X)$.

$B(X)$ es un espacio lineal, donde la suma está definida por $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$; el producto por escalares por $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$; y, la función cero como $\theta(x) = 0$. La función $\|\cdot\| : B(X) \to \mathbb{R}$ dada por $\|f\| = \sup\{|f(x)||x \in X\}$ define una norma en $B(X)$. Esta norma recibe el nombre de **norma uniforme** o **norma del supremo**.

Demostración.

1. Es evidente que para cualquier $f \in B(X)$, $\|f\| \geq 0$. Por otro lado, como $\sup\limits_{x\in X}\{|f(x)|\} \geq |f(x)|$ para cualquier $x \in X$, es claro que $\|f\| = 0$ si y sólo si $f(x) = 0$ para toda $x \in X$.
2. Sea $f \in B(X)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\|\lambda f\| = \sup_{x\in X} |\lambda f(x)| = \sup_{x\in X} |\lambda||f(x)| = |\lambda| \sup_{x\in X} |f(x)| = |\lambda|\|f\|.$$

3. Sean $f, g \in B(X)$. Entonces

$$\|f+g\| = \sup_{x\in X} |f(x)+g(x)| \leq \sup_{x\in X} |f(x)| + \sup_{x\in X} |g(x)| = \|f\| + \|g\|,$$

lo cual muestra que $\|\cdot\|$ es una norma en $B(X)$. $\square$

Ejemplo 2.7.2. Denotemos por ℓ_2 el conjunto dado por

$$\ell_2 = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots) \,\middle|\, x_i \in \mathbb{R},\ \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty \right\}.$$

ℓ_2 es un espacio lineal, dónde la suma está definida por $x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots)$; el producto por escalares por $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots)$; y el vector cero es el punto $(0, 0, \dots)$.

Se define en ℓ_2 la función $\|\cdot\| : \ell_2 \to \mathbb{R}$, de la siguiente manera:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2}.$$

El espacio $(\ell_2, \|\cdot\|)$ es un espacio normado conocido como **espacio de Hilbert**.

Demostración. Primero veamos que ℓ_2 es cerrado bajo la suma y la múltiplicación por escalares. En efecto, si $x = (x_1, x_2, \dots)$, y $y = (y_1, y_2 \dots)$ son dos puntos arbitrarios de ℓ_2,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i+y_i|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (|x_i|^2 + 2\,|x_i|\,|y_i| + |y_i|^2) = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|\,|y_i| + \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 .$$

Pero el primer y el último sumando son series convergentes, por lo que para demostrar la convergencia de $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i+y_i|^2$ sólo faltaría demostrar la convergencia de la serie $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i||y_i|$. Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i| \leq \sqrt{\Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\Big)}.$$

Tomando el límite cuando n tiente a infinito, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|\,|y_i| \leq \sqrt{\Big(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2\Big)}. \tag{11}$$

Como las series $\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2}$ y $\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2}$ convergen, el producto

$$\Big(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2\Big) < \infty.$$

Luego

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|\,|y_i| \leq \infty,$$

como se quería demostrar.

Por otro lado, si $x \in \ell_2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda x_i|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda|^2 |x_i|^2 = |\lambda|^2 \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty,$$

lo cual implica que $\lambda x \in \ell_2$. Por último, verificaremos que la función $\|\cdot\|$ es una norma. Es claro que $\|\cdot\|$ satisface los axiomas 1 y 2 de la definición 2.7.1.

Como hemos visto anteriormente $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\sum_{i=1}^{\infty} |x_i||y_i|$. Observemos que de la desigualdad (11), se sigue directamente que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i||y_i| \leq \|x\|\|y\|,$$

por lo que

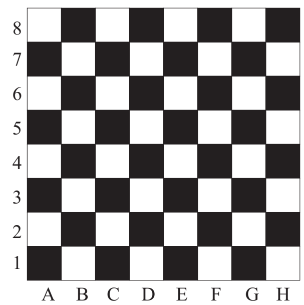
$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

De donde podemos concluir que $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$. $\square$

2.8. Ejercicios del capítulo

1. Sea $X = \{1, 2, 3\}$. Queremos construir una métrica para X, que satisfaga $d(1, 2) = 2$ y $d(1, 3) = 3$ ¿Cuál debe ser el valor de $d(2, 3)$ para que d sea métrica?
2. Sea $X \neq \emptyset$. Prueba que si $d(x, y)$ satisface que $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$ y la desigualdad del triángulo, entonces $d'(x, y) = d(x, y) + d(y, x)$ es una métrica para X.

3. ¿ Cuáles de las siguientes son métricas para $\mathbb{R}$?
   a) $d(x, y) = (x - y)^2$,
   b) $d(x, y) = \sqrt{|x - y|}$,
   c) $d(x, y) = |x^2 - y^2|$,
   d) $d(x, y) = ||x| - |y||$.
4. Sea X el conjunto formado por las casillas de un tablero de ajedrez como el que se ilustra a continuación.



Considermos el caballo (C), la Reina (D), el rey (R) y la torre (T). Para cada una de estas piezas definamos las siguientes funciones de $X \times X$ en $\mathbb{R}$:
   a) $d_C(x, y)$ = mínimo número de movimientos que necesita un caballo para ir de la casilla x a la casilla y,
   b) $d_D(x, y)$ = mínimo número de movimientos que necesita la Reina para ir de la casilla x a la casilla y,
   c) $d_R(x, y)$ = mínimo número de movimientos que necesita un Rey para ir de la casilla x a la casilla y,
   d) $d_T(x, y)$ = mínimo número de movimientos que necesita una torre para ir de la casilla x a la casilla y.

   Por ejemplo, $d_C(B2, G6) = 3$, mientras que $d_D(B2, G6) = 2$. Demuestra que cada una de estas funciones define una métrica en X ¿Porqué el alfil no puede definir una métrica en X? Para cada una de las métricas describe cómo serían las bolas abiertas.
5. Da un ejemplo de un espacio métrico X, en el cual existan puntos x y y, tales que $B(x, r) \subsetneqq B(y, q)$ con $r > q$.
6. Define una métrica d en $\mathbb{R}^2$ tal que la bola unitaria coincida con el interior de la elipse dada por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; es decir, $B((0, 0), 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\}$, con a y b números reales positivos.
7. Sean d_X y d_Y métricas para los espacios X y Y respectivamente. Menciona al menos dos métricas para el producto $X \times Y$.
8. Sean $X = [0, 1)$ y $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ dada por

$$\rho(x, y) = \text{mín}\{|x - y|, 1 - |x - y|\}.$$

Demuestra que ρ es una métrica en X. Interpreta geométricamente.

9. Considera el espacio métrico (X, ρ) del ejercicio anterior. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$ ¿Es continua esta función?
10. Demuestra que si (X, d) es un espacio métrico discreto, y Y es un espacio métrico arbitrario, entonces cualquier función $f : X \to Y$ es continua.

Capítulo 3

Espacios Topológicos

En este capítulo introduciremos las nociones básicas de la topología general. La idea principal es llevar el concepto de conjunto abierto de un espacio métrico, introducido en el capítulo anterior, a una noción más abstracta que nos permita generalizar algunos de los conceptos y propiedades de los espacios métricos a otro tipo de estructuras matemáticas, a las que llamaremos *espacios topológicos.*

3.1. Espacios Topológicos

Definición 3.1.1. *Sea X un conjunto no vacío. Una colección τ de subconjuntos de X se llama **topología** en X, si se satisfacen los siguientes axiomas:*

1. *El conjunto vacío y X están en τ.*
2. *Si $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ es una familia cualquiera de elementos de τ, entonces la unión $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha$ está en τ.*
3. *Si $\{U_1, \ldots, U_n\}$ es una familia finita de elementos de τ, entonces la intersección $U_1 \cap \cdots \cap U_n$ es elemento de τ.*

*Los elementos de τ reciben el nombre de conjuntos **abiertos** de X, y al conjunto X junto con la topología τ se llama **espacio topológico**. A los elementos de X se les suele llamar puntos.*

Nota 3.1.2. *Hay dos cosas que definen un espacio topológico: un conjunto subyacente X y una familia τ de subconjuntos de X que constituye una topología. Formalmente un espacio topológico es un par ordenado (X, τ). Pero por lo general, cuando no haya riesgo de confusión vamos a denotar al espacio topológico (X, τ) simplemente por X dejando implícitamente claro que hay una topología τ en X.*

Así, en un espacio topológico X el conjunto vacío y X son abiertos, la unión de cualquier familia de abiertos es un conjunto abierto, y la intersección de toda familia finita de abiertos es también un conjunto abierto.

Si el lector tiene una idea sobre cómo son los conjuntos abiertos en la recta real o en el plano, es importante que no trate de imaginar conjuntos "abiertos típicos" de esta forma en un espacio topológico abstracto. En general, cualquier subconjunto de un conjunto dado X puede ser abierto si la topología en X se elige apropiadamente.

Ejemplos 3.1.1.

1. Sea (X, d) un espacio métrico, y sea τ_d la familia de todos los subconjuntos abiertos de X en el sentido de la métrica d, como se vió en el capítulo anterior. Entonces τ_d es una topología en X, llamada la topología generada por la métrica d. (Ver el teorema 2.2.4). Llamaremos **metrizable** a cualquier espacio topológico (X, τ) cuya topología es generada por alguna métrica d. Nótese la diferencia de este concepto con el de espacio métrico, que es un espacio dotado de una métrica particular explícita. En tanto que cada métrica d para X induce una única topología τ_d, dado un espacio metrizable (X, τ) con más de un punto siempre es posible hallar muchas métricas que generen su topología, por ejemplo si $\tau = \tau_d$, entonces también $\tau = \tau_{2d}$.
2. Sea X un conjunto no vacío. La colección $\tau = 2^X$ de todos los subconjuntos de X forma una topología en X, llamada topología **discreta**.
3. Sea X un conjunto no vacío. Entonces $\tau = \{\emptyset, X\}$ es una topología en X, llamada topología **trivial** o **antidiscreta**.
4. Sea X un conjunto no vacío y A un subconjunto de X. Entonces $\tau = \{\emptyset, A, X\}$ es una topología en X.
5. Sea X cualquier conjunto infinito. La colección

$$\tau = \{U \subset X \mid X \setminus U \text{ es finito}\} \cup \{\emptyset\},$$

es una topología en X, llamada topología **cofinita**.

Demostración.

- Por definición $\emptyset \in \tau$. Por otro lado, $X \setminus X = \emptyset$ es finito, de donde concluimos que X pertenece a τ.
- Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una familia arbitraria de elementos de τ. Entonces $X \setminus U_\alpha$ es un subconjunto finito para cada $\alpha \in \mathcal{A}$. Así,

$$X \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} (X \setminus U_\alpha)$$

es una intersección de conjuntos finitos y por tanto es finita. De este modo, tenemos que $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha \in \tau$.
- Sean $U, V \in \tau$. Entonces $X \setminus U$ y $X \setminus V$ son subconjuntos finitos de X, y por tanto su unión

$$(X \setminus U) \cup (X \setminus V) = X \setminus (U \cap V)$$

es un subconjunto finito. Por esta razón podemos concluir que $U \cap V$ es un elemento de τ.

Así, τ es una topología en X. $\square$

6. Sea X cualquier conjunto infinito. La familia

$$\tau = \{U \subset X \mid X \setminus U \text{ es numerable}\} \cup \{\emptyset\}$$

es una topología en X, llamada topología **conumerable**.

7. Sean X un conjunto no vacío y $B \subset X$. Entonces

$$\tau = \{U \subset X \mid B \subset U\} \cup \{\emptyset\}$$

es una topología en X.

8. Sea X un conjunto no vacío y $B \subset X$. Entonces

$$\tau = \{U \subset X \mid U \cap B = \emptyset\} \cup \{X\}$$

es una topología en X.

9. Sea X el conjunto de tres puntos $\{a, b, c\}$. Consideremos cuatro familias de subconjuntos de X
   $\tau_1 = \{\{a\}, \{a, b\}, \emptyset, X\}$.
   $\tau_2 = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \emptyset, X\}$.
   $\tau_3 = \{\{a, c\}, \emptyset, X\}$.
   $\tau_4 = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{c\}, \emptyset, X\}$.
   Entonces τ_1, τ_2 y τ_3 son topologías en X pero τ_4 no lo es.

Los ejemplos anteriores muestran que en un mismo conjunto pueden definirse varias topologías. Estas topologías a veces pueden ser comparables. Así arribamos a la siguiente definición.

Definición 3.1.3. *Sean τ_1 y τ_2 dos topologías en un conjunto no vacío X. Si $\tau_1 \subset \tau_2$ diremos que τ_1 es* ***más débil*** *o* ***más gruesa*** *que τ_2 y τ_2 es* ***más fuerte*** *o* ***más fina*** *que τ_1.*

Ejemplos 3.1.2.

1. Sea X un conjunto no vacío, y τ una topología para X. Claramente $\{\emptyset, X\} \subset \tau \subset 2^X$. Esto es, las topologías trivial y discreta son respectivamente las topologías más débil y más fuerte que se pueden definir para X.
2. Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces la topología generada por la métrica d es más fuerte que la topología cofinita.

3.2. Operador Interior

Definición 3.2.1. *Sea X es un espacio topológico.*

1. *Para todo $x \in X$, diremos que U es* ***vecindad*** *de x, si U es un abierto en X que contiene a x.*
2. *Si $A \subset X$. Se dice que x es un* ***punto interior*** *de A, si existe una vecindad U de x tal que $U \subset A$.*
3. *El conjunto de los puntos interiores de A se llama* ***interior*** *de A y se denota por $\operatorname{Int} A$ o $\mathring{A}$..*

De esta definición sigue inmediatamente que

$$\operatorname{Int} A = \bigcup \{U \mid U \subset A,\ U \text{ es abierto}\}.$$

En otras palabras, $\operatorname{Int} A$ es el subconjunto abierto más grande contenido en A. Este hecho, a su vez implica la siguiente prposición.

Proposición 3.2.2. *Sean X un espacio topológico y $A \subset X$. Entonces A es abierto si y sólo si $A = \operatorname{Int} A$.*

De esta manera obtuvimos el operador de interior $\operatorname{Int} : 2^X \to 2^X$ que asigna a cada $A \in 2^X$ un subconjunto abierto de X. Evedintemente, este operador es monótono en el sentido de la siguiente proposición.

Proposición 3.2.3. *Sea X un espacio topológico. Si $A \subset B \subset X$, entonces $\operatorname{Int} A \subset \operatorname{Int} B$.*

Pero las propiedades más importantes del operador Int están reflejados en el siguiente teorema.

Teorema 3.2.4. *En cualquier espacio topológico X, el operador del interior tiene las siguientes propiedades:*

1. $\operatorname{Int} X = X$.
2. $\operatorname{Int} A \subset A$.
3. $\operatorname{Int} (\operatorname{Int} A) = \operatorname{Int} A$.
4. $\operatorname{Int} (A \cap B) = \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$.

Demostración.

1. Como X es un conjunto abierto, se sigue de la proposición 3.2.2 que $\operatorname{Int} X = X$.
2. Es inmediato de la definición de $\operatorname{Int} A$.

3. Para demostrar que $\operatorname{Int}(\operatorname{Int} A) = \operatorname{Int} A$, simplemente notemos que $\operatorname{Int} A$ es abierto y apliquemos nuevamente la proposición 3.2.2 para obtener $\operatorname{Int}(\operatorname{Int} A) = \operatorname{Int} A$.
4. Como $A \cap B \subset A$ y $A \cap B \subset B$, por la proposición 3.2.3 $\operatorname{Int}(A \cap B) \subset \operatorname{Int} A$ e $\operatorname{Int}(A \cap B) \subset \operatorname{Int} B$, de donde $\operatorname{Int}(A \cap B) \subset \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$. Por otro lado, notemos que $\operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$ es un subconjunto abierto contenido en $A \cap B$. Entonces, $\operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B \subset \operatorname{Int}(A \cap B)$. Así podemos concluir que $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$.

□

Resulta ser que las quatro propiedades del teorema anterior caracterizan al operador del interior. A saber, tiene lugar el siguiente teorema.

Teorema 3.2.5. *Sean X un conjunto no vacío y $\phi : 2^X \to 2^X$ una función que satisface las siguientes propiedades:*

1. $\phi(X) = X$.
2. $\phi(A) \subset A$.
3. $\phi(\phi(A)) = \phi(A)$.
4. $\phi(A \cap B) = \phi(A) \cap \phi(B)$.

para todo par de subconjuntos A y B de X.

Entonces existe una única topología τ en X cuyo operador interior es exactamente igual a ϕ, es decir, $\phi(A) = \operatorname{Int} A$ para todo subconjunto A de X, donde Int *es el operador interior respecto a la topología τ.*

Antes de demostrar el teorema anterior, necesitamos la siguiente proposición:

Proposición 3.2.6. *Sea ϕ una función como se describe en el teorema 3.2.5. Entonces para todo par de subconjuntos A y B de X tales que $A \subset B$, se tiene que $\phi(A) \subset \phi(B)$.*

Demostración. Tenemos que $A = A \cap B$. Aplicando la propiedad 4, obtenemos $\phi(A) = \phi(A \cap B) = \phi(A) \cap \phi(B)$ y por lo tanto $\phi(A) \subset \phi(B)$. □

Demostración del teorema 3.2.5. Afirmamos que τ, definida como:

$$\tau = \{A \subset X \mid \phi(A) = A\},$$

es la topología buscada.

1. Por la primera propiedad de ϕ, tenemos que $X \in \tau$. Como $\phi(\emptyset) \subset \emptyset$ entonces $\phi(\emptyset) = \emptyset$ y por lo tanto $\emptyset \in \tau$.
2. Sea $\{A_s\}_{s \in S} \subset \tau$. Para todo $s_0 \in S$, tenemos que $A_{s_0} \subset \bigcup\limits_{s \in \mathcal{S}} A_s$ y en consecuencia $\phi(A_{s_0}) \subset \phi(\bigcup\limits_{s \in \mathcal{S}} A_s)$. Como $A_{s_0} = \phi(A_{s_0})$, se tiene

que $A_{s_0} \subset \phi(\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} A_s)$. De aquí obtenemos $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} A_s \subset \phi(\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} A_s)$. La otra contención está asegurada por el punto 2, en conclusión $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} A_s = \phi(\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} A_s)$, lo cual muestra que $\bigcup\limits_{s\in\mathcal{S}} A_s \in \tau$.

3. Sean $U_1, \ldots, U_n$ elementos de τ. Por ello $\phi(U_i) = U_i$ para $i = 1, \ldots, n$. Del punto 4 tenemos que
$$\phi(U_1 \cap \cdots \cap U_n) = \phi(U_1) \cap \cdots \cap \phi(U_n) = U_1 \cap \cdots \cap U_n,$$
y por lo tanto $U_1 \cap \cdots \cap U_n \in \tau$.
4. Falta ver que el operador interior respecto a la topología definida τ, es igual a ϕ. Para ello, primero demostremos que ϕ es monótono, es decir para todo par de subconjuntos A y B de X tales que $A \subset B$, se tiene que $\phi(A) \subset \phi(B)$.

   En efecto, tenemos que $A = A \cap B$. Aplicando la propiedad 4 de ϕ, obtenemos $\phi(A) = \phi(A \cap B) = \phi(A) \cap \phi(B)$, y por lo tanto, $\phi(A) \subset \phi(B)$.

   Ahora, tomemos un subconjunto $A \subset X$ y veremos primero que $\operatorname{Int} A \subset \phi(A)$. Como $\operatorname{Int} A \subset A$ y ϕ es monótono tenemos que $\phi(\operatorname{Int} A) \subset \phi(A)$. Del hecho que $\operatorname{Int} A$ es un abierto de la topología τ, se tiene que $\phi(\operatorname{Int} A) = \operatorname{Int} A \subset A$, y por lo tanto, $\operatorname{Int} A = \phi(\mathrm{IntA}) \subset \phi(\mathrm{A})$.

   Para demostrar la inclusión $\phi(A) \subset \operatorname{Int} A$, observemos que $\phi(A) \subset A$, y entonces por la proposición 3.2.3, $\operatorname{Int}(\phi(A)) \subset \operatorname{Int} A$.

   Por la tercera propiedad de ϕ, tenemos que $\phi(\phi(A)) = \phi(A)$. Luego, por la definición de la topología τ esto nos dice que $\phi(A)$ es abierto. Pero, según de la proposición 3.2.2, el conjunto $\phi(A)$ es abierto si y sólo si $\phi(A) = \operatorname{Int} \phi(A)$. Junto con lo anterior, obtendremos que $\phi(A) = \operatorname{Int}(\phi(A)) \subset \operatorname{Int} A$. Así que $\phi(A) = \operatorname{Int} A$.

$\square$

3.3. Conjuntos cerrados y operador cerradura

En un espacio topológico es útil definir también la noción dual de la noión de un conjunto abierto.

Definición 3.3.1. *Sea X un espacio topológico. Un conjunto $A \subset X$ se llama* ***cerrado*** *si el complemento $X \setminus A$ es abierto en X.*

Observemos que un conjunto no abierto no necesariamente es cerrado. Por ejemplo, en $X = \mathbb{R}$ provisto de la topología inducida por la métrica euclidiana, el intervalo $(0, 1]$ no es ni abierto ni cerrado en X.

Naturalmente, los axiomas de una topología se traducen a las siguientes propiedades de conjuntos cerrados.

Teorema 3.3.2. *Sea X un espacio topológico. Si $\mathcal{C}$ es la colección de todos los subconjuntos cerrados de X, entonces los siguientes enunciados se satisfacen.*

1. $\emptyset \in \mathcal{C}$ *y* $X \in \mathcal{C}$.
2. *Si* $\{D_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$*, es una familia arbitraria de elementos de* $\mathcal{C}$ *entonces* $\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} D_\alpha \in \mathcal{C}$.
3. *Si* $\{C_1, \ldots, C_n\}$ *es una familia finita de elementos de* $\mathcal{C}$*, entonces la unión* $C_1 \cup \cdots \cup C_n$ *también es elemento de* $\mathcal{C}$.

Demostración.

1. Sabemos que $\emptyset$ y X son subconjuntos abiertos, por lo que sus respectivos complementos serán subconjuntos cerrados. Por consiguiente $\emptyset = X \setminus X$ y $X = X \setminus \emptyset$ son subconjuntos cerrados.
2. Tenemos que
$$X \setminus \Big(\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} D_\alpha \Big) = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} (X \setminus D_\alpha)$$
es abierto, ya que $X \setminus D_\alpha$ es abierto para cada $\alpha \in \mathcal{A}$. Lo cual implica, que la intersección de sus complementos es cerrado; que es lo que se quería demostrar.
3. Como $X \setminus C_i$ es un subconjunto abierto de X para $i = 1, \ldots, n$, la intersección $\bigcap_{i=1}^{n} (X \setminus C_i)$ también es un subconjunto abierto y por tanto su complemento es cerrado. Resta de observar que
$$X \setminus \big(\bigcap_{i=1}^{n} (X \setminus C_i) \big) = \bigcup_{i=1}^{n} C_i.$$

□

La dualidad entre las nociones de conjuntos abiertos y de conjuntos cerrados hace posible definir la estructura de un espacio topológico atraves de conjuntos cerrados. A saber, tiene lugar el siguiente teorema.

Teorema 3.3.3. *Si X es un conjunto no vacío y $\mathcal{C}$ una colección de subconjuntos de X que satisface los incisos* 1, 2 *y* 3 *del teorema 3.3.2, entonces existe una única topología τ para la cual $\mathcal{C}$ es exactamente la familia de todos los subconjuntos cerrados en el espacio topológico (X, τ).*

Demostración. Comencemos por definir
$$\tau = \{U \subset X \mid X \setminus U \in \mathcal{C}\}.$$

Por hipótesis sabemos que tanto X como $\emptyset$ son elementos de $\mathcal{C}$, y por lo tanto, $\emptyset = X \setminus X \in \tau$ y $X = X \setminus \emptyset \in \tau$.

Ahora bien, si $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ es una familia arbitraria de elementos de τ, entonces la familia $\{D_\alpha = X \setminus U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ está contenida en $\mathcal{C}$. Por el inciso 2 (del teorema 3.3.2), sabemos que $\bigcap\limits_{\alpha\in A} D_\alpha \in \mathcal{C}$, y por tanto su complemento pertenece a τ. Es decir,

$$\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = \bigcup_{\alpha\in A}(X \setminus D_\alpha) = X \setminus \Big(\bigcap_{\alpha\in A} D_\alpha \in \mathcal{C}\Big) \in \tau.$$

Por último, sea $\{U_1, \ldots, U_n\}$ una colección finita de elementos de τ. Entonces existe una familia finita $\{C_1, \ldots, C_n\}$ de elementos de $\mathcal{C}$ tal que $U_i = X \setminus C_i$ para $i = 1, \ldots, n$. Por el inciso 3 (del teorema 3.3.2), tenemos que $\bigcup\limits_{i=1}^{n} C_i \in \mathcal{C}$, y por tanto, $X \setminus \Big(\bigcup\limits_{i=1}^{n} C_i\Big) \in \tau$. En otras palabras

$$\bigcap_{i=1}^{n} U_i = \bigcap_{i=1}^{n}(X \setminus C_i) = X \setminus \Big(\bigcup_{i=1}^{n} C_i\Big) \in \tau.$$

De esta manera podemos concluir que τ es una topología en X. Además, de la definición de τ, se sigue que $\mathcal{C}$ es la familia de cerrados en (X, τ). Claramente τ es la única topología posible en X que tiene a $\mathcal{C}$ como familia de todos los cerrados. $\square$

La noción dual de la noción del punto interior es la del punto de cerradura (o de adherencia) la cual sigue abajo.

Definición 3.3.4. *Sean X un espacio topológico, $A \subset X$ y $x \in X$. Se dice que x es* ***punto cerradura*** *o* ***punto de adherencia*** *de A, si para toda vecindad U de x, se cumple que $U \cap A \neq \emptyset$.*

Al conjunto de todos los puntos de adherencia de A se le llama ***cerradura*** *de A y se denota por $\overline{A}$.*

Evidentemente, se tiene que $A \subset \overline{A}$.

Ejemplo 3.3.1. Consideremos la recta real y $A = (0, 1]$. Entonces $\overline{A} = [0, 1]$

Teorema 3.3.5. *Sean X un espacio topológico y $A \subset X$. A es cerrado si y sólo si $A = \overline{A}$.*

Demostración. Supongamos que A es cerrado. Como $A \subset \overline{A}$, sólo falta demostrar que $\overline{A} \subset A$. Consideremos cualquier punto $x \in X \setminus A$, entonces $U = X \setminus A$ es una vecindad para x. Notemos que $U \cap A = \emptyset$, por lo que x

no puede estar en $\overline{A}$. De esta manera tenemos que $X \setminus A \subset X \setminus \overline{A}$, y por lo tanto $\overline{A} \subset A$, como se quería demostrar.

Ahora supongamos que $A = \overline{A}$. Observemos que cada $x \in X \setminus \overline{A}$ posee una vecindad U_x tal que $U_x \cap A = \emptyset$, o sea, $U_x \subset X \setminus A_x$.

Entonces,

$$X \setminus A = \bigcup_{x \in X \setminus A} U_x,$$

por lo que, siendo una unión de conjuntos abiertos, $X \setminus A$ es abierto. De este modo, podemos concluir que A es un subconjunto cerrado.

□

Así, tenemos definido el *operador de cerradura* como una función $\varphi : 2^X \to 2^X$ que asigna a cada conjunto $A \in 2^X$ un conjunto cerrado $\varphi(A) = \overline{A} \in 2^X$ de tal manera que $A \subset \overline{A}$.

De la definición es evidente que el operador de cerradura es monótono en el sentido de la siguiente proposición.

Proposición 3.3.6. *Sea X un espacio topológico. Si A y B son dos subconjuntos de X tales que $A \subset B$, entonces $\overline{A} \subset \overline{B}$.*

Resulta ser que la cerradura es el conjunto cerrado mas pequeño que contiene al conjunto dado. Es decir, tiene lugar lo siguiente proposición.

Proposición 3.3.7. *Sean X un espacio topológico y $A \subset X$ un subconjunto cualquiera. Entonces $\overline{A} = \bigcap\{F \subset X \mid A \subset F$ y F es cerrado$\}$. Particularmente, $\overline{A}$ es un conjunto cerrado.*

Demostración. Sea $\mathcal{F} = \{F \subset X \mid A \subset F \text{ y } F \text{ es cerrado}\}$. Como $\overline{A}$ es cerrado y $A \subset \overline{A}$, se tiene que $\overline{A} \in \mathcal{F}$. Así $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \subset \overline{A}$.

Por otro lado, observemos que $A \subset F$ para todo $F \in \mathcal{F}$. Entonces, por la monocidad del operador de cerradura, esto omplica que $\overline{A} \subset \overline{F}$. Como F es cerrado, por el teorema 3.3.5 se tiene que $\overline{F} = F$. Así, $\overline{A} \subset F$ para todo $F \in \mathcal{F}$, y por o tanto, $\overline{A} \subset \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$. □

Evidentemente la dualidad entre conjuntos abiertos y cerrados tiene que llevar a una dualidad entre la noción de cerradura y la noción de interior. Esto se formaliza en la siguiente proposición.

Proposición 3.3.8. *Sean X un espacio topológico y $A \subset X$. Entonces:*

$$X \setminus \operatorname{Int} A = \overline{X \setminus A} \quad y \quad X \setminus \bar{A} = \operatorname{Int}(X \setminus A).$$

Demostración. Notemos simplemente que $x \in \overline{X \setminus A}$ si y sólo si para cualquier vecindad U de x, $U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$. Pero esto último sucede si y sólo si $x \notin \operatorname{Int} A$. En otras palabras, $x \in \overline{X \setminus A}$ si y sólo si $x \in X \setminus \operatorname{Int} A$, que es justo lo que se quería demostrar. La segunda fórmula se obtiene de la primera sustituyendo A por $X \setminus A$. □

En el siguiente teorema estableceremos propiedades básicas del operador de cerradura. Aún que este teorema es consecuencia simple del teorema 3.2.4, de la proposición 3.3.8 y de las reglas de De Morgan, nosotros daremos también una demostración directa.

Teorema 3.3.9. *Si X es un espacio topológico, entonces para cualesquiera subconjuntos A y B de X se satisfacen los siguientes enunciados:*

1. $\overline{\emptyset} = \emptyset$.
2. $A \subset \overline{A}$.
3. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.
4. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Demostración.

1. Por el teorema 3.3.2, sabemos que $\emptyset$ es un subconjunto cerrado. Si aplicamos el teorema 3.3.5 a este conjunto, deducimos que $\overline{\emptyset} = \emptyset$.
2. Es evidente.
3. Por la proposición 3.3.7, $\overline{A}$ es un conjunto cerrado, y por lo tanto, según del teorema 3.3.5, $\overline{A}$ tiene que concidir con su cerradura, es decir, $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.
4. Tanto A como B son subconjuntos de $A \cup B$, por tanto podemos aplicar la proposición 3.3.6 para deducir que $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ y $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. De esta manera, obtenemos la contención $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

   Ahora como $A \subset \overline{A}$ y $B \subset \overline{B}$, es claro que $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Si aplicamos nuevamente la proposición 3.3.6 obtenemos que $\overline{A \cup B} \subset \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$. Observemos que la proposición 3.3.7 nos garantiza que tanto $\overline{A}$ como $\overline{B}$ son conjuntos cerrados, por lo que $\overline{A} \cup \overline{B}$, al ser la unión de dos cerrados, es cerrado. Así, por el teorema 3.3.5 se tiene que $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$, y por tanto, $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. De este modo,
$$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}.$$

□

Teorema 3.3.10 (Kuratowski)**.** *Sean X un conjunto no vacío y $\phi : 2^X \to 2^X$ una función tal que para todo par de subconjuntos A y B de X,*

1. $\phi(\emptyset) = \emptyset$,
2. $A \subset \phi(A)$,

3. $\phi(\phi(A)) = \phi(A)$
4. $\phi(A \cup B) = \phi(A) \cup \phi(B)$

Entonces existe una única topología τ en X tal que el operador cerradura respecto a τ coincide con ϕ, es decir, para cualquier subconjunto A de X, se tiene que $\phi(A) = \overline{A}$.

Demostración. Sea $\psi : 2^X \to 2^X$ dada por $\psi(A) = X \setminus \phi(X \setminus A)$. Entonces

1. $\psi(X) = X \setminus \phi(X \setminus X) = X \setminus \phi(\emptyset) = X \setminus \emptyset = X$
2. $(X \setminus A) \subset \phi(X \setminus A)$, luego $\psi(A) = X \setminus \phi(X \setminus A) \subset A$
3. $\psi(\psi(A)) = \psi(X \setminus \phi(X \setminus A)) = X \setminus \phi\big(X \setminus (X \setminus \phi(X \setminus A))\big)$
   $= X \setminus \phi(\phi(X \setminus A)) = X \setminus \phi(X \setminus A)$
   $= \psi(A)$
4. $\psi(A \cap B) = X \setminus (\phi\big(X \setminus (A \cap B))\big) = X \setminus \big(\phi((X \setminus A) \cup (X \setminus B))\big)$
   $= X \setminus \big(\phi(X \setminus A) \cup \phi(X \setminus B)\big) = \big(X \setminus \phi(X \setminus A)\big) \cap \big(X \setminus \phi(X \setminus B)\big)$
   $= \psi(A) \cap \psi(B)$

Así, en virtud del teorema 3.2.5 tenemos que existe una única topología cuyo operador interior es exactamente ψ. Por la proposición 3.3.8 esta topología es la única tal que ϕ es precisamente su operador cerradura. $\square$

Definición 3.3.11. *Sean X un espacio topológico y $A \subset X$. El conjunto $\overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$ se llama **frontera** de A y se denota por $Fr(A)$.*

Proposición 3.3.12. *Sean X un espacio topológico y A un subconjunto de X. Entonces $Fr(A) = \overline{A} \setminus \operatorname{Int} A$.*

Demostración. Sea $x \in Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$. Queremos ver que $x \in \overline{A} \setminus \operatorname{Int} A$. Sea U cualquier vecindad de x. Como $x \in \overline{X \setminus A}$ entonces $U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$, es decir no existe una vecindad de x tal que esté contenida en A, lo que significa que $x \notin \operatorname{Int} A$. Por hipótesis $x \in \overline{A}$, concluimos que $x \in \overline{A} \setminus \operatorname{Int} A$.

Ahora, sea $x \in \overline{A} \setminus \operatorname{Int} A$, como $x \notin \operatorname{Int} A$ esto implica que toda vecindad U de x interseca $X \setminus A$. De aquí tenemos que $x \in \overline{X \setminus A}$. Por hipótesis $x \in \bar{A}$, por lo tanto $x \in \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$. $\square$

Proposición 3.3.13. *Sean X un espacio topológico y $A \subset X$. Se cumplen las siguientes igualdades:*

a) $\overline{A} = A \cup Fr(A)$
b) $\operatorname{Int}(A) = A \setminus Fr(A)$
c) $X = \operatorname{Int}(A) \cup Fr(A) \cup \operatorname{Int}(X \setminus A)$

Demostración.

a) $A \cup Fr(A) = A \cup (\overline{A} \cap \overline{X \setminus A}) = (A \cup \overline{A}) \cap (A \cup \overline{X \setminus A})$
$\quad = \overline{A} \cap X = \overline{A}.$

b) $A \setminus Fr(A) = A \setminus (\overline{A} \cap \overline{X \setminus A}) = (A \setminus \overline{A}) \cup (A \setminus \overline{X \setminus A})$
$\quad = A \setminus \overline{(X \setminus A)} = \operatorname{Int}(A)$

c) $X = \operatorname{Int}(A) \cup (X \setminus \operatorname{Int} A)) = \operatorname{Int}(A) \cup \overline{X \setminus A}$
$\quad = \operatorname{Int}(A) \cup Fr(X \setminus A) \cup (X \setminus A)$
$\quad = \operatorname{Int}(A) \cup Fr(A) \cup \operatorname{Int}(X \setminus A) \cup \big((X \setminus A) \setminus \operatorname{Int}((X \setminus A))\big)$
$\quad = \operatorname{Int}(A) \cup Fr(A) \cup \operatorname{Int}(X \setminus A)$

$\square$

Ejemplos 3.3.2.

1. Si X es un espacio discreto, para todo $A \subset X$, $Fr(A) = \emptyset$.
2. Si X es un espacio antidiscreto, entonces para todo $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, se cumple $Fr(A) = X$.
3. En la recta real, la frontera de cualquier intervalo (a, b), $[a, b]$, $(a, b]$ o $[a, b)$ son sus extremos $\{a, b\}$.
4. En cualquier espacio métrico, $Fr(B(x, r)) \subset S(x, r)$. En algunos espacios se da la igualdad, por ejemplo en $\mathbb{R}^n$.

3.4. Densidad

Definición 3.4.1. *Sean X un espacio topológico y $A \subset X$. Se dice que A es **denso** en X si $\overline{A} = X$.*

De la definición anterior se sigue que A es denso en X si y sólo si todo abierto U intersecta al conjunto A.

Definición 3.4.2. *Se dice que un espacio topológico X es **separable** si existe un subconjunto numerable y denso en X.*

Ejemplos 3.4.1.

1. Para cualquier espacio topológico X, se cumple que X es denso en X.
2. Sea $\mathbb{R}$ el espacio de los números reales con la topología euclidiana. Si $\mathbb{Q}$ denota el conjunto de los números racionales, entonces $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$. Más aún, como $\mathbb{Q}$ es un conjunto numerable, $\mathbb{R}$ es un espacio separable.
3. Consideremos X el espacio topológico introducido en el Ejemplo 7 de la secciï¿½n de ejemplos 3.1.1. El conjunto B es denso en X. Más

aún, si B' es subconjunto numerable de B, entonces B' es denso en X, por lo que X es un espacio separable.

DEMOSTRACIÓN. Sean $B' \subset B$ y U un abierto de X. De la definición de la topología de X tenemos que $B \subset U$, de lo cual se infiere que $B' \subset U$ y por tanto $B' \cap U \neq \emptyset$. Así B' es denso en X. Para demostrar que X es separable, basta tomar B' numerable. $\square$

Proposición 3.4.3. *Sea A un subconjunto denso de un espacio topológico X. Entonces para todo abierto $U \subset X$ se tiene que $\overline{U} = \overline{U \cap A}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in \overline{U}$, y V una vecindad arbitraria de x. Entonces, $U \cap V \neq \emptyset$, por lo que $U \cap V$ es un subconjunto de X abierto y no vacío. Como A es denso, se tiene que $A \cap (U \cap V) \neq \emptyset$. Así $(U \cap A) \cap V \neq \emptyset$, y por tanto $x \in \overline{U \cap A}$. Por otro lado, como $U \cap A \subset U$, siempre se cumple que $\overline{U \cap A} \subset \overline{U}$. Así, llegamos a que $\overline{U} = \overline{U \cap A}$, como se quería demostrar. $\square$

3.5. Bases

Definición 3.5.1. *Sean X un espacio topológico y $\mathcal{B}$ una familia de abiertos. La familia $\mathcal{B}$ se llama **base** para la topología de X si para cualquier abierto U, existe una subfamilia $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}} \subset \mathcal{B}$, tal que $U = \bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha$. A los elementos de la base $\mathcal{B}$ se les llama abiertos básicos.*

Proposición 3.5.2. *$\mathcal{B}$ es una base del espacio topológico X si y sólo si para cualquier abierto U y para toda $x \in U$, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V \subset U$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\mathcal{B}$ es base. Sean U un abierto de X y $x \in U$. Entonces existe una subfamilia $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de $\mathcal{B}$ tal que $U = \bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha$. Como $x \in U$, existe $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ tal que $x \in U_{\alpha_0}$. Claramente $V := U_{\alpha_0}$ es el elemento básico buscado.

Ahora supongamos que para cualquier abierto U, y para cualquier $x \in U$, existe un elemento V_x de $\mathcal{B}$ tal que $x \in V_x \subset U$. De este modo es fácil ver que $U = \bigcup\limits_{x \in U} V_x$, por lo que $\mathcal{B}$ es base para la topología de X.

$\square$

Ejemplo 3.5.1.

1. La colección de los singuletes $\{\{x\} \mid x \in X\}$ es base para la topología discreta en X. De hecho, cualquier otra base para la topología discreta contiene a esta colección.
2. La recta real posee varias bases interesantes. Las siguientes colecciones son algunas de ellas:
$$\mathcal{B}_1 = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R},\ a < b\}.$$
$$\mathcal{B}_2 = \{(p,q) \mid p,q \in \mathbb{Q},\ p < q\}.$$
$$\mathcal{B}_3 = \{(r,s) \mid r,s \in\ \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ r < s\}.$$
3. Para cualquier espacio métrico (X, ρ), las siguientes son bases para la topología generada por la métrica ρ:
   a) $\mathcal{B}_1 = \{B(x,\varepsilon) \mid x \in X,\ \varepsilon > 0\}$
   b) $\mathcal{B}_2 = \{B(x,r) \mid x \in X,\ r > 0,\ r \in \mathbb{Q}\}$.

Teorema 3.5.3. *Sea X un espacio topológico. Si $\mathcal{B}$ es una base de la topología de X, los siguientes enunciados se cumplen:*

$\mathcal{B}$1: *Para toda $x \in X$, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V$.*

$\mathcal{B}$2: *Para cualesquiera $V_1, V_2 \in \mathcal{B}$ y para toda $x \in V_1 \cap V_2$, existe $V_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V_3 \subset V_1 \cap V_2$.*

Demostración.

$\mathcal{B}1$. Como X es abierto, existe una familia $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ de elementos de $\mathcal{B}$ tal que $X = \bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} V_\alpha$. Así, para cada $x \in X$, existe $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ para el cual $x \in V_{\alpha_0}$, que es un elemento de la base $\mathcal{B}$, como se quería demostrar.

$\mathcal{B}2$. Ahora consideremos dos elementos V_1 y V_2 de $\mathcal{B}$ y $x \in V_1 \cap V_2$. Como $\mathcal{B}$ es base y $V_1 \cap V_2$ es abierto, por la proposición 3.5.2 existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V \subset V_1 \cap V_2$. Por lo tanto $\mathcal{B}$ satisface las propiedades $\mathcal{B}1$ y $\mathcal{B}2$.

$\square$

Teorema 3.5.4. *Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{B}$ una colección de subconjuntos de X que satisface las propiedades $\mathcal{B}1$ y $\mathcal{B}2$ del teorema 3.5.3. Entonces, existe una única topología τ en X para la cual $\mathcal{B}$ es base.*

Demostración. Definamos τ como la colección de todos los subconjuntos de X que tienen la forma $\bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} V_\alpha$, donde $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ es una subfamilia de $\mathcal{B}$. Demostremos que τ es una topología en X.

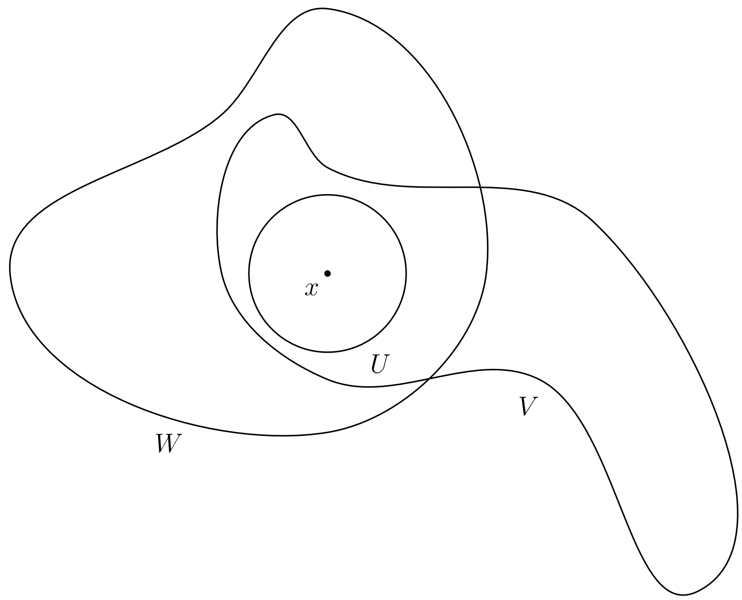


Figura 1. Propiedades de una base

1. $\emptyset \in \tau$ ya que $\emptyset$ es la unión de una familia vacía de elementos de $\mathcal{B}$.

   Por otro lado, $\mathcal{B}1$ nos garantiza que para cualquier $x \in X$ existe un elemento $V_x \in \mathcal{B}$, tal que $x \in V_x$. En consecuencia $X = \bigcup_{x \in X} V_x$, por lo que $X \in \tau$.
2. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una familia arbitraria de elementos de τ. Entonces, para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, existe $\{V_{\gamma_\alpha}\}_{\gamma_\alpha \in G_\alpha} \subset \mathcal{B}$, tal que $U_\alpha = \bigcup_{\gamma_\alpha \in G_\alpha} V_{\gamma_\alpha}$. Luego

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha = \bigcup_{\substack{\alpha \in A \\ \gamma_\alpha \in G_\alpha}} V_{\gamma_\alpha},$$

   de donde concluimos que $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau$.
3. Sean $U_1, \ldots, U_n$ elementos de τ. Entonces para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ existe una subfamilia $\{U_{\gamma_i}\}_{\gamma_i \in G_i}$ de $\mathcal{B}$ tal que $U_i = \bigcup_{\gamma_i \in G_i} U_{\gamma_i}$.

   Así,

$$\bigcap_{i=1}^{n} U_i = \bigcap_{i=1}^{n} \Big(\bigcup_{\gamma_i \in G_i} U_{\gamma_i} \Big) = \bigcup_{\gamma_i \in G_i} \Big(\bigcap_{i=1}^{n} U_{\gamma_i} \Big).$$

Se sigue de la propiedad $\mathcal{B}2$ que para cualquier $x \in \bigcap_{i=1}^{n} U_{\gamma_i}$, existe $W_x \in \mathcal{B}$, tal que $x \in W_x \subset \bigcap_{i=1}^{n} U_{\gamma_i}$. De esta manera, $\bigcap_{i=1}^{n} U_{\gamma_i} = \bigcup\{W_x \mid x \in \bigcap_{i=1}^{n} U_{\gamma_i}\}$.

Por lo cual

$$\bigcap_{i=1}^{n} U_i = \bigcup_{\gamma_i \in G_i} \Big(\bigcup \{W_x \mid x \in \bigcap_{i=1}^{n} U_{\gamma_i}\} \Big).$$

De este modo $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ se expresa como unión de elementos de $\mathcal{B}$ y por lo tanto es abierto.

Los tres incisos anteriores nos muestran que τ es una topología para la cual $\mathcal{B}$ es base. Demostremos ahora que es la única topología posible con esta propiedad. Supongamos que existe τ' una topología en X para la cual $\mathcal{B}$ es base. Sea $U \in \tau'$. Como $\mathcal{B}$ es base para esta topología, $U = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha$, donde $U_\alpha \in \mathcal{B} \subset \tau$ para toda $\alpha \in \mathcal{A}$. Por lo tanto $U \in \tau$. Entonces $\tau' \subset \tau$. Análogamente se demuestra que $\tau \subset \tau'$. Así, $\tau = \tau'$. $\square$

Ejemplo 3.5.2. Consideremos $\mathbb{R}$, el conjunto de los números reales y

$$\mathcal{B} = \{[a, b) \subset \mathbb{R} \mid a < b,\ a, b \in \mathbb{R}\}.$$

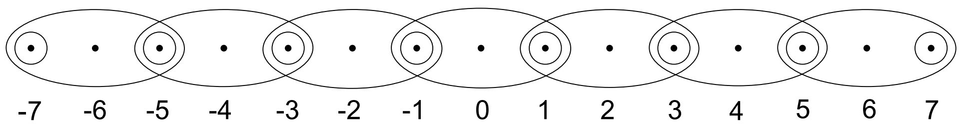
$\mathcal{B}$ satisface las propiedades $\mathcal{B}1$ y $\mathcal{B}2$, y por tanto es base para una topología τ_s en $\mathbb{R}$. El espacio topológico $(\mathbb{R}, \tau_s)$ recibe el nombre de **recta de Sorgenfrey**.

Ejemplos 3.5.3.

1. Sea $X = \mathbb{Z}$. Para cada $n \in X$, definimos

$$V(n) = \begin{cases} \{n\} & \text{si } n \text{ es impar} \\ \{n-1, n, n+1\} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Ahora, consideremos $\mathcal{B} = \{V(n) \mid n \in X\}$. Es fácil ver que $\mathcal{B}$ satisface $\mathcal{B}\mathbf{1}$ y $\mathcal{B}\mathbf{2}$, por lo que de acuerdo al teorema 3.5.4, existe una única topología para la cual $\mathcal{B}$ es base. A la topología resultante se le llama **topología de la recta digital** y al espacio topológico $(\mathbb{Z}, \tau)$ se le llama **recta digital**.



2. Ahora definiremos el plano digital. Como en el caso de la recta digital, la idea es tener un conjunto de abiertos, constituidos de un único punto, que modelen los pixeles de una imagen digital y adicionalmente tener puntos representando los espacios entre pixeles. Consideremos el conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, para cada punto (m, n), definimos el elemento básico $B(m, n)$ como sigue:

$$B(m,n) = \begin{cases} \{(m,n)\} & \text{Si } m \text{ y } n \text{ son impares,} \\ \{(m+i,n) \mid i = -1,0,1\} & \text{Si } m \text{ es par y } n \text{ impar,} \\ \{(m,n+j) \mid j = -1,0,1\} & \text{Si } m \text{ es impar y } n \text{ par,} \\ \{(m+i,n+j) \mid i,j = -1,0,1\} & \text{Si } m \text{ es par y } n \text{ impar.} \end{cases}$$

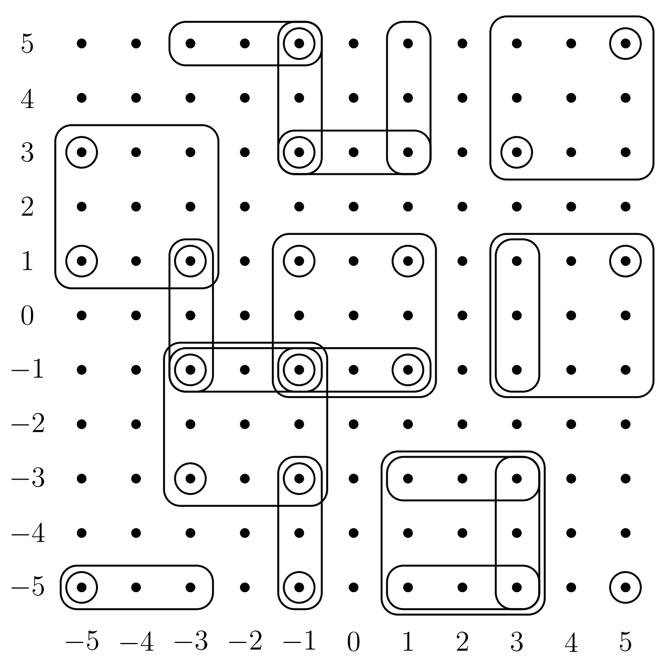


Figura 2. El Plano Digital

La colección $\mathcal{D} = \{B(m,n) \mid (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$ es base para una topología en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. El espacio topológico resultante es llamado el **plano digital**. Los elementos básicos $B(m,n) = \{(m,n)\}$, donde m y n son ambos impares, son los abiertos constituidos de un único punto que representan los pixeles de una imagen digital. En la figura siguiente se muestran algunos de los elementos básicos de la topología del plano digital.

3. La familia $\mathcal{B} = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}, a < b\} \cup \{\{x\} \mid x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$ es base para una topología τ_M en $\mathbb{R}$, al espacio topológico $(\mathbb{R}, \tau_M)$ se le conoce como recta de Michael $\mathbb{M}$.

   Además podemos restringirnos a los intervalos con extremos racionales en el primer conjunto de esta unión, o solo a los intervalos con extremos irracionales, para describir una base de $\mathbb{M}$.

   Es fácil ver que $(a,b) \subset \mathbb{M}$ es abierto y cerrado si $a,b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, entonces si consideramos solamente los intervalos con extremos en los irracionales para dar una base de $\mathbb{M}$, se sigue que $\mathbb{M}$ tiene una base constituida por abiertos y cerrados; a esta clase de espacios se les denomina **0-dimensionales**.

3.6. Subbases

Definición 3.6.1. *Sea X un espacio topológico. Una familia de abiertos Γ de X se llama **subbase** para la topología de X si la colección $\mathcal{B}_\Gamma$ de todas las intersecciones finitas de elementos de Γ, constituye una base para la topología de X.*

Ejemplos 3.6.1.

1. Consideremos el espacio de los números reales. Sea

$$\Gamma = \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{(b, \infty) \mid b \in \mathbb{R}\}.$$

   Como $(-\infty, a) \cap (b, \infty) = (b, a)$ para $b < a$, inferimos que Γ es subbase para la topología usual de $\mathbb{R}$.

2. En $\mathbb{R}^2$ consideremos como Γ al conjunto de todas las franjas horizontales y verticales. Es decir,

$$\Gamma = \{(a,b) \times \mathbb{R} \mid a < b \ a,b \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R} \times (c,d) \mid c < d, \ c,d \in \mathbb{R}\}.$$

   La familia Γ es subbase para la topología usual de $\mathbb{R}^2$.

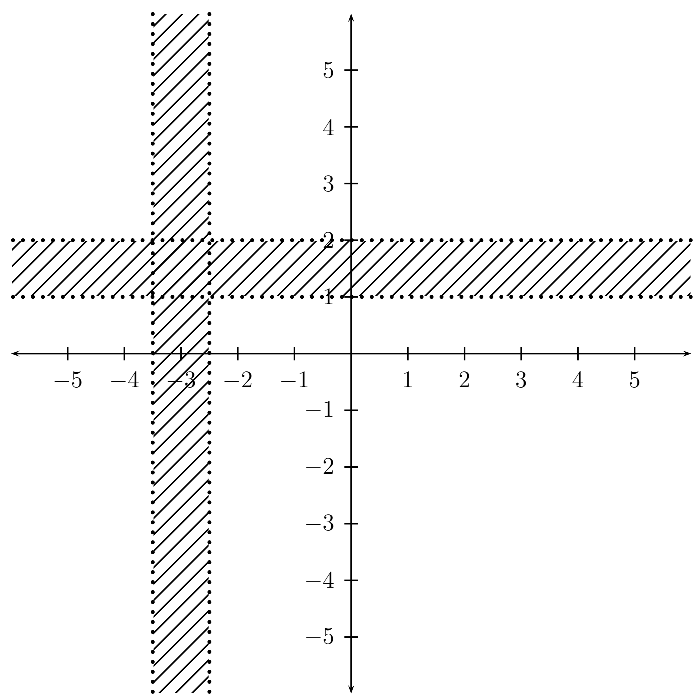


FIGURA 3. Una subbase para $\mathbb{R}^2$

Teorema 3.6.2. *Sea X un espacio topológico. Entonces toda subbase Γ satisface la siguiente condición:*

Γ1 : *Para toda $x \in X$ existe $V \in \Gamma$ tal que $x \in V$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{B}_\Gamma$ la colección de todas las intersecciones finitas de elementos de Γ. Como Γ es subbase, $\mathcal{B}_\Gamma$ es base para la topología de X. Si $x \in X$, por la propiedad $\mathcal{B}1$ correspondiente a $\mathcal{B}_\Gamma$, existe $U \in \mathcal{B}_\Gamma$, tal que U es vecindad de x. Pero $U = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$ para algunas $V_i \in \Gamma$. Entonces, $x \in V_i \in \Gamma$ para cualquier $i \in \{1, \ldots, n\}$. $\square$

Teorema 3.6.3. *Sea X un subconjunto no vacío. Si Γ es una colección de subconjuntos de X que satisface **Γ1**, Entonces existe una única topología τ en X para la cual Γ es subbase.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}_\Gamma$ la colección de todas las intersecciones finitas de elementos de Γ. En virtud del teorema 3.5.4, basta demostrar que $\mathcal{B}_\Gamma$ cumple con las propiedades $\mathcal{B}1$ y $\mathcal{B}2$.

Observemos que $\mathbf{\Gamma 1}$ nos dice que Γ cubre a X. Como $\Gamma \subset \mathcal{B}_\Gamma$, tenemos que $\mathcal{B}_\Gamma$ también cubre a X y por lo tanto $\mathcal{B}_\Gamma$ satisface **B1**.

Por otro lado, consideremos $U, V \in \mathcal{B}_\Gamma$. Entonces, $U = \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_{\gamma_i}$ y $V = \bigcap\limits_{j=1}^{p} U_{\beta_j}$, con $U_{\gamma_i} \in \Gamma$ y $U_{\beta_j} \in \Gamma$. Se sigue que

$$U \cap V = \big(\bigcap_{i=1}^{n} U_{\gamma_i}\big) \cap \big(\bigcap_{j=1}^{p} U_{\beta_j}\big) = \bigcap_{i=1}^{n+p} U_{\alpha_i},$$

donde:

$$U_{\alpha_i} = \begin{cases} U_{\gamma_i} & si\ i \in \{1 \dots n\}, \\ U_{\beta_{i-n}} & si\ i \in \{n+1 \dots n+p\}. \end{cases}$$

De lo cual se concluye que $U \cap V \in \mathcal{B}_\Gamma$, y por tanto $\mathcal{B}_\Gamma$ satisface $\mathcal{B}2$. $\square$

Ejemplos 3.6.2.

1. Sea $X = C([a,b])$ el conjunto de las funciones reales continuas definidas en el intervalo $[a,b]$.

   Para cada punto $x \in [a,b]$ y todo par $(r,q) \in \mathbb{R}^2$, definimos

   $$M_x^{(r,q)} = \{f \in C[a,b] \mid r < f(x) < q\}.$$

   Sea $\Gamma = \{M_x^{(r,q)} \mid x \in [a,b],\ r,q \in \mathbb{R}\}$. Es fácil ver que Γ es cubierta. La topología generada por Γ se llama topología de convergencia puntual y al espacio topológico se le denota como $C_p[a,b]$.
2. Sea $X = C[a,b]$ el conjunto de las funciones reales continuas definidas en el intervalo $[a,b]$.

   Para todo par de intervalos $[c,d], (r,q)$ con $[c,d] \subset [a,b]$ definimos

   $$M_{[c,d]}^{(r,q)} = \{f \in C[a,b] \mid f([c,d]) \subset (r,q)\}.$$

   Sea $\Gamma = \{M_{[c,d]}^{(r,q)} \mid c,d,r,q \in \mathbb{R},\ a \leq c < d \leq b,\ r < q\}$. Es fácil ver que Γ es cubierta. La topología generada por Γ se llama topología de convergencia uniforme y al espacio topológico se le denota como $C_u[a,b]$.

3.7. Bases locales

Definición 3.7.1. *Sean X un espacio topológico, $x \in X$ y τ_x la totalidad de todas las vecindades de x, es decir $\tau_x = \{U \mid U$ es vecindad de $x\}$. Una* ***base local*** *o* ***sistema fundamental de vecindades*** *para x es una subfamilia $\mathcal{B}_x \subset \tau_x$ tal que para cualquier $U \in \tau_x$, existe $V \in \mathcal{B}_x$ tal que $V \subset U$.*

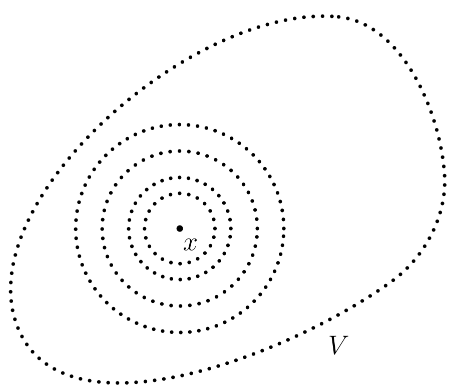


FIGURA 4. Base local

Ejemplos 3.7.1.

1. Sean (X, d) un espacio métrico y $x \in X$, entonces la familia de bolas abiertas con centro en x
$$\mathcal{B}_x = \{B(x, 1/n) \mid n \in \mathbb{N}\}$$
es una base local numerable para x.
2. Sea X un espacio discreto. Para cada $x \in X$, la familia unipuntual $\mathcal{B}_x = \big\{\{x\}\big\}$, es una base local en x.

Definición 3.7.2.

1. *Sea X un espacio topológico. Decimos que X es* ***primero numerable*** *o* ***I-numerable*** *si existe una base local numerable para todo punto $x \in X$.*
2. *Sea X un espacio topológico. Decimos que X es* ***segundo numerable*** *o* ***II-numerable*** *si existe una base numerable para la topología de X.*

Ejemplo 3.7.2. Sea $X = \mathbb{R}_s$ la recta de Sorgenfrey. Para cada $x \in X$, sea $\mathcal{B}_x = \{[x, x + 1/n) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Es fácil ver que para cada punto $x \in X$, el conjunto $\mathcal{B}_x$ es base local numerable. Así, $\mathbb{R}_s$ es primero numerable.

Proposición 3.7.3. *Sea X un espacio topológico. Si X es II-numerable entonces X es I-numerable.*

Demostración. Sea $\mathcal{B} = \{U_1, U_2, \ldots\}$ una base numerable para la topología de X. Para cada punto $x \in X$, definimos $\mathcal{B}_x = \{U_j \in \mathcal{B} \mid x \in U_j\}$. Ya que $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{B}$, es claro que $\mathcal{B}_x$ es numerable para cada $x \in X$. Falta demostrar que $\mathcal{B}_x$ es una base local para x.

Sea U una vecindad de x en X. Como $\mathcal{B}$ es base, existe $U_k \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U_k \subset U$. Como $x \in U_k$ entonces $U_k \in \mathcal{B}_x$ así que B_x es una base local en x. $\square$

El siguiente ejemplo nos brinda un espacio **I**-numerable que no es **II**-numerable.

Ejemplo 3.7.3. Sea (X, ρ) el conjunto de las sucesiones reales acotadas, equipado con la métrica del supremo, es decir:

$$X = \{s = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \bigm| |x_i| \leq M_s, \text{ para cada } i \in \mathbb{N}\}$$

$$\rho(s_1, s_2) = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i - y_i|, \text{ donde } s_1 = (x_1, x_2, \ldots) \text{ y } s_2 = (y_1, y_2, \ldots).$$

Es claro que (X, τ_ρ) es **I**-numerable (como todo espacio metrizable) pero no es **II**-numerable, como veremos a continuación.

En efecto, sean $\mathcal{B}$ una base para X y

$$S = \{s = (x_1, x_2, \ldots) \mid x_i \in \{0, 1\}, \text{ para cada } i \in \mathbb{N}\}.$$

Claramente S no es numerable y además $\rho(s, t) = 1$ para cualesquiera $s, t \in S$ con $s \neq t$. Como $\mathcal{B}$ es base, para cada $s \in S$ existe $U_s \in \mathcal{B}$ tal que $s \in U_s \subset B(s, \frac{1}{2})$. Así, si $s, t \in S$, y $s \neq t$, $U_s \cap U_t \subset B(s, \frac{1}{2}) \cap B(t, \frac{1}{2}) = \emptyset$, en particular $U_s \neq U_t$. Así la correspondencia $s \mapsto U_s$ es una función inyectiva de S en $\mathcal{B}$ y por tanto $\mathcal{B}$ no es numerable.

Teorema 3.7.4. *Sea (X, ρ) un espacio métrico. Entonces X es **II**-numerable si y sólo si X es separable.*

Demostración. Supongamos que X es **II**-numerable, y sea $\mathcal{B} = \{U_1, U_2, \ldots\}$ una base numerable para X. Para cada $n \in \mathbb{N}$ elegimos un punto $a_n \in U_n$, y definimos $A = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Entonces para cada abierto no vacío U existe un abierto básico $U_n \in \mathcal{B}$ tal que $U_n \subset U$. Esto implica que $a_n \in U \cap A$ y por lo tanto A es denso en X.

Supongamos ahora que X es separable, y sea $A = \{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ un subconjunto denso numerable de X. Sea $\mathcal{B} = \{B(a_k, 1/n) \mid a_k \in A,\ n \in \mathbb{N}\}$. Es claro que $\mathcal{B}$ es numerable. Afirmamos que $\mathcal{B}$ es una base para la topología de X.

En efecto, si U es un abierto en X y $x \in U$, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset U$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < r/4$. Como A es denso, $A \cap B(x, 1/n) \neq \emptyset$ y por lo tanto existe $a_k \in A$ tal que $a_k \in B(x, 1/n)$; por consiguiente $x \in B(a_k, 1/n)$.

Afirmamos que $B(a_k, 1/n) \subset U$. A saber, sea $z \in B(a_k, 1/n)$. Calculando las distancias, tenemos que

$$d(z, x) \leq d(z, a_k) + d(a_k, x) \leq 1/n + 1/n < r/4 + r/4 < r,$$

consecuentemente $z \in B(x, r) \subset U$. Entonces $B(a_k, 1/n) \subset U$, que es lo que se quería demostrar. □

Teorema 3.7.5. *Sea X un espacio topológico. Para cada $x \in X$ sea $\mathcal{B}_x$ una base local en x. Entonces se cumplen los siguientes enunciados:*

$\mathcal{BL}1$**:** *Si $V \in \mathcal{B}_x$, entonces $x \in V$.*
$\mathcal{BL}2$**:** *Si $y \in U \in \mathcal{B}_x$ entonces existe $V \in \mathcal{B}_y$ tal que $V \subset U$.*
$\mathcal{BL}3$**:** *Si $V_1, V_2 \in \mathcal{B}_x$ entonces existe $V \in \mathcal{B}_x$ tal que $V \subset V_1 \cap V_2$.*

Demostración. Los enunciados $\mathcal{BL}1$ y $\mathcal{BL}2$ son evidentes. Para demostrar $\mathcal{BL}3$, simplemente notemos que si V_1 y V_2 pertenecen a $\mathcal{B}_x$, esto implica que $V_1 \cap V_2$ es vecindad de x, por lo que existe $V \in \mathcal{B}_x$, tal que $V \subset V_1 \cap V_2$. □

Teorema 3.7.6. *Sea X un conjunto no vacío. Supongamos que para cada $x \in X$, existe una colección $\mathcal{B}_x$ de subconjuntos de X que cumple con $\mathcal{BL}1$, $\mathcal{BL}2$, $\mathcal{BL}3$. Entonces existe una única topología τ en X para la cual $\mathcal{B}_x$ es base local en x para todo $x \in X$.*

Demostración. Sea $\mathcal{B} = \bigcup\{\mathcal{B}_x \mid x \in X\}$. En virtud del teorema 3.5.4 basta ver que $\mathcal{B}$ satisface las propiedades $\mathcal{B}1$ y $\mathcal{B}2$ de una base.

Sea $x \in X$, entonces por $\mathcal{BL}1$ existe $U \in \mathcal{B}_x$ con $x \in U$, por lo que $\mathcal{B}$ satisface $\mathcal{B}1$.

Para demostrar $\mathcal{B}2$ consideremos $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$, y sea $x \in U_1 \cap U_2$. Como $U_i \in \mathcal{B}$, entonces $U_i \in \mathcal{B}_{x_i}$ para alguna x_i, $i = 1, 2$. Dado que $x \in U_1$ y $x \in U_2$, por $\mathcal{BL}2$ existen $V_1, V_2 \in \mathcal{B}_x$ tal que $V_1 \subset U_1$, $V_2 \subset U_2$. Ahora, por $\mathcal{BL}3$ existe $V \in \mathcal{B}_x \subset \mathcal{B}$ tal que

$$x \in V \subset V_1 \cap V_2 \subset U_1 \cap U_2.$$

Así, $\mathcal{B}$ satisface $\mathcal{B}2$ y por tanto, por el teorema 3.5.4, $\mathcal{B}$ es base para una única topología τ en X.

Verifiquemos que para todo $x \in X$, $\mathcal{B}_x$ es base local en x. Sea W una vecindad de x, como $\mathcal{B}$ es base de la topología τ, existe un $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V \subset W$. De la definición de $\mathcal{B}$, se sigue que $V \in \mathcal{B}_z$ para algún punto $z \in X$. Ahora, la propiedad $\mathcal{BL}2$ nos garantiza la existencia de un elemento $U \in \mathcal{B}_x$ tal que $U \subset V$. Así, $U \subset W$, con lo que queda demostrado que $\mathcal{B}_x$ es base local en x. La unicidad de la topología τ es evidente. □

Ejemplo 3.7.4. Sean L_1 y L_2 subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ definidos por

$$L_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0\}.$$

$$L_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_2 > 0\}.$$

Llamemos $L = L_1 \cup L_2$.Para cada $x \in L$ definamos $\mathcal{B}_x$ como sigue:

a) Si $x \in L_2$ entonces $\mathcal{B}_x = \{B(x, r) \cap L | \; r > 0\}$, donde $B(x, r)$ denota la bola abierta usual en $\mathbb{R}^2$ de radio r y centro en x.
b) Si $x \in L_1$ entonces $\mathcal{B}_x = \{U(x, r) | \; r > 0\}$, dónde $U(x, r)$ es la unión del punto x y de la bola abierta de radio r tangente a L_1 en x.

Para todo punto $x \in X$, $\mathcal{B}_x$ satisface las propiedades $\mathcal{BL}1$, $\mathcal{BL}2$, y $\mathcal{BL}3$ del teorema 3.7.5 y por tanto generan una topología τ en L. El espacio topológico (L, τ) recibe el nombre de **plano de Niemytzki.**

Antes de enunciar las siguientes definiciones, conviene recordar que dos cardinales siempre son comparables y la relación así definida $<$ resulta ser un buen orden. Es decir, toda colección de cardinales posee un primer elemento, al que llamaremos mínimo.

Definición 3.7.7. *Sea X un espacio topológico, se define:*

$$w(X) = \text{mín}\{\alpha \mid \textit{existe una base } \mathcal{B} \textit{ con } |\mathcal{B}| = \alpha\}.$$

A $w(X)$ se le llama el ***peso*** *de X.*

Definición 3.7.8. *Sean X un espacio topológico y $x \in X$. El* ***peso local*** *en x o* ***carácter*** *de X en x es el cardinal $\chi(X, x)$ dado por*

$$\chi(X, x) = \text{mín}\{\alpha \mid \textit{existe una base local } \mathcal{B}_x \textit{ con } |\mathcal{B}_x| = \alpha\}.$$

El ***carácter*** *de X se define como el cardinal $\chi(X)$ dado por*

$$\chi(X) = \text{mín}\{\alpha \mid \alpha \geq \chi(X, x), \textit{ para todo } x \in X\}.$$

De las definiciones anteriores se sigue que cualquier espacio topológico X satisface la desigualdad $\chi(X) \leq w(X)$.

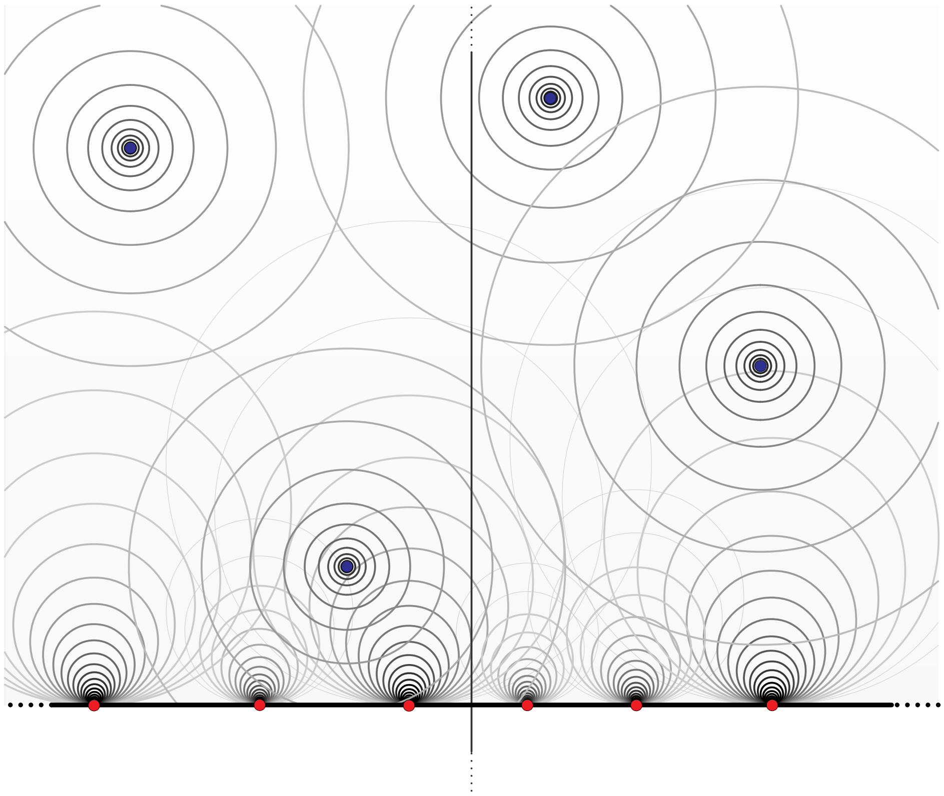


FIGURA 5. El Plano de Niemytzki

Los espacios topológicos con bases y bases locales numerables poseen propiedades muy importantes, algunas de las cuales serán estudiadas más adelante. Observemos que un espacio topológico X es primero numerable si $\chi(X) = \aleph_0$. Análogamente, X es segundo numerable si $w(X) = \aleph_0$.

Ejemplo 3.7.5. La recta real es segundo numerable (ver Ejemplo 3.5.1).

Ejemplo 3.7.6. La recta de Sorgenfrey (ver Ejemplo 3.5.2) es primero numerable pero no es segundo numerable.

DEMOSTRACIÓN. Denotemos por $\mathbb{R}_s$ la recta de Sorgenfrey. Para cada $x \in \mathbb{R}_s$, la familia $\mathcal{B}_x = \{[x, x + 1/n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ es una base local numerable, por lo que $\chi(\mathbb{R}_s) = \aleph_0$.

Sea $\mathcal{B}$ una base para $\mathbb{R}_s$. Para cada $x \in \mathbb{R}$, $[x, x + 1)$ es una vecindad de x, luego existe $U_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U_x \subset [x, x + 1)$. Claramente $x \neq y$

implica que $U_x \neq U_y$, luego $\{U_x \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{B}$ no es numerable y por tanto $\mathcal{B}$ tampoco lo es. $\square$

En el capítulo anterior introdujimos la definición de convergencia de sucesiones en espacios métricos. En los espacios topológicos, esta definición se generaliza de la siguiente manera.

Definición 3.7.9. *Sea X un espacio topológico y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Se dice que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al punto $x \in X$, si para toda vecindad U de x, existe $M \in \mathbb{N}$, tal que $x_n \in U$ para todo $n > M$. Este hecho se denota escribiendo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$*

Teorema 3.7.10. *Sea X es un espacio topológico primero numerable y $A \subset X$. Entonces $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe una sucesión contenida en A, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$.*

Demostración. Primero supongamos que $x \in \overline{A}$. Sea $\mathcal{B}_x = \{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base local numerable en el punto x. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $V_n \subset V_m$ si $n > m$, ya que de no ser así podemos tomar $V_n' = \bigcap\limits_{i=1}^{n} V_n$. La colección así definida también es una base local en x y claramente cumple lo que deseamos. Construiremos una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$.

Como V_n es una vecindad de x para toda $n \in \mathbb{N}$ y x es punto de adherencia de A, $V_n \cap A \neq \emptyset$. De esta manera, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos escoger un punto $a_n \in V_n \cap A$. Afirmamos que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión buscada. En efecto, si U es una vecindad de x, existe $V_m \in \mathcal{B}_x$ tal que $V_m \subset U$. Consecuentemente, si $n > m$, $V_n \subset V_m$. En conclusión, $a_n \in V_m \subset U$ para toda $n > m$. Así, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$. Por otro lado, es evidente que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está contenida en A. De este modo queda demostrado que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión buscada.

Ahora, si existe una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contenida en A y que converge a x, entonces para cualquier vecindad, U de x, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que si $n > m$, $a_n \in U$. Por lo tanto $U \cap A \neq \emptyset$. Así, $x \in \overline{A}$ como se quería demostrar. $\square$

3.8. Subespacios Topológicos

Dado un subconjunto Y de un espacio topológico X, existe una manera muy natural de definir una topología en Y. A continuación explicaremos cómo.

Proposición 3.8.1. *Sean X un espacio topológico y $Y \subset X$. Consideremos el conjunto $\tau_Y = \{U \cap Y \mid U \in \tau\}$. Entonces τ_Y es una topología en Y.*

Demostración.

1. Como $\emptyset$ y X son elementos de τ, tenemos $Y = X \cap Y$ y $\emptyset = \emptyset \cap Y$, por tanto Y y $\emptyset$ son elementos de τ_Y.
2. Sea $\{V_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una familia arbitraria de elementos de τ_Y. Para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, existe un elemento $U_\alpha \in \tau$, tal que $V_\alpha = U_\alpha \cap Y$. Luego,
$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} (U_\alpha \cap Y) = \Big(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha \Big) \cap Y.$$
Como $\bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha \in \tau$, podemos concluir que $\bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha \in \tau_Y$
3. Sean $V_1, V_2 \in \tau_Y$. Entonces, existen U_1 y U_2 en τ tales que $V_1 = U_1 \cap Y$ y $V_2 = U_2 \cap Y$. De este modo
$$V_1 \cap V_2 = (U_1 \cap Y) \cap (U_2 \cap Y) = (U_1 \cap U_2) \cap Y.$$
Pero $U_1 \cap U_2 \in \tau$, por lo que $V_1 \cap V_2 \in \tau_Y$.

□

Definición 3.8.2. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $Y \subset X$. La topología τ_Y definida en la proposición 3.8.1 recibe el nombre de **topología inducida por** τ, y sus elementos se llaman **abiertos en Y** o **abiertos relativos**. En este caso diremos que (Y, τ_Y) es un **subespacio** de (X, τ).*

Resulta claro de esta definición, que si $\mathcal{B}$ es base para la topología de X, $\mathcal{B}_Y = \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{B}\}$ es base para la topología inducida en Y. Análogamente, la topología del espacio ambiente hereda sub-bases y bases locales a los subespacios. Resulta claro entonces que si Y es un subespacio de X, $w(Y) \leq w(X)$ y $\chi(Y) \leq \chi(X)$. Veamos algunos ejemplos de subespacios.

Ejemplo 3.8.1. Consideremos el plano euclideano $\mathbb{R}^2$.

Sea $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$. Entonces la topología inducida en Y coincide con la topología usual en la recta real, identificando a Y con $\mathbb{R}$ mediante $x \mapsto (x, 0)$

Demostración. Bastará demostrar que los básicos relativos son abiertos de la topología usual, y que los básicos usuales son abiertos de la topología inducida. Sea $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Tenemos que $(a, b) = B(\frac{a+b}{2}, r) \cap Y$, con $r = \frac{b-a}{2}$. En consecuencia, el intervalo (a, b) es un abierto relativo.

Sea $B(\bar{x}, r)$ un abierto básico de $\mathbb{R}^2$, con $\bar{x} = (x, y)$. Si $|y| \geq r$, entonces $B(\bar{x}, r) \cap Y = \emptyset$. Si en cambio $|y| < r$, es fácil ver que
$$B(\bar{x}, r) \cap Y = (x - \sqrt{r^2 - y^2},\, x + \sqrt{r^2 - y^2})$$
es un abierto de $\mathbb{R}$.

□

Ejemplo 3.8.2. Si X es un espacio topológico discreto, cualquier subconjunto $Y \subset X$ con la topología inducida, será un espacio discreto.

Proposición 3.8.3. *Sean X un espacio topológico, $Y \subset X$ y $B \subset Y$. Entonces B es cerrado en Y si y sólo si existe un cerrado B' en X tal que $B = Y \cap B'$.*

Demostración. Denotemos por τ la topología de X. Supongamos que B es cerrado en Y. Entonces $Y \setminus B \in \tau_Y$, por lo que existe $U \in \tau$ tal que $Y \setminus B = U \cap Y$. De este modo $B = Y \cap (X \setminus U)$. Si $B' = X \setminus U$, claramente B' es cerrado en X y $B = B' \cap Y$.

Ahora supongamos que existe un cerrado $B' \subset X$ tal que $B = Y \cap B'$. Notemos que

$$Y \setminus B = Y \setminus (Y \cap B') = Y \cap (X \setminus B')$$

Como $X \setminus B'$ es abierto en X, concluimos que $Y \setminus B$ es abierto en Y y por tanto B es cerrado en Y. □

Ejemplo 3.8.3. Consideremos $\mathbb{R}$ con la topología usual. Sea $Y = (0,1) \cup [6,7]$. Entonces cada uno de los conjuntos $(0,1)$ y $[6,7]$ es abierto y cerrado en Y.

Sea (X, τ) un espacio topológico, $Y \subset X$ y $Z \subset Y$. Observemos que Z puede verse como un subespacio topológico de X o como un subespacio topológico de Y. Denotemos por τ_Z la topología en Z inducida por τ, y por $(\tau_Y)_Z$ la topología inducida por τ_Y. Resulta ser que ambas topologías coinciden; es decir, $(\tau_Y)_Z = \tau_Z$. La demostración de este hecho es muy sencilla y se deja como ejercicio al lector.

3.9. Ejercicios del capítulo

1. Sean $X = \{a, b, c\}$ y $\tau = \{\emptyset, \{a, b, c\}, \{b\}, \{a, b\}, \{c, b\}\}$, probar que τ es una topología en X.
2. Sea $X \neq \emptyset$ y $\{\tau_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una familia de topologías en X. Probar que $\tau = \bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} \tau_\alpha$ es topología de X.

3. Prueba que en un espacio métrico finito, cualquier subconjunto es abierto (es decir, el espacio es discreto).
4. Verdadero o Falso:
   a) Si τ es una topología para X, entonces
   $$\tau' = \{U \subset X \mid U \notin \tau\}$$
   es una topología para X.
   b) $\tau = \{A \subset \mathbb{Z} \bigm| |A| \geq 2\} \cup \{\emptyset, \mathbb{Z}\}$ es una topología para $\mathbb{Z}$.
5. Encuentra $\operatorname{Int} \mathbb{Q}$ y $\overline{\mathbb{Q}}$ en $\mathbb{R}$ provisto con la topología usual.
6. Si X es un espacio topológico y $A \subset X$ ¿Será cierto que $\operatorname{Int} A = \operatorname{Int} \overline{A}$? Demuéstralo o da un contraejemplo.
7. Para dos subconjuntos cualesquiera A y B de un espacio topológico, ï¿½cuáles de las siguientes contenciones son ciertas? (Demuestra o da un contraejemplo).
   a) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$,
   b) $\overline{A \cap B} \supset \overline{A} \cap \overline{B}$,
   c) $\operatorname{Int} A \cup \operatorname{Int} B \subset \operatorname{Int}(A \cup B)$,
   d) $\operatorname{Int} A \cup \operatorname{Int} B \supset \operatorname{Int}(A \cup B)$,
   e) $\overline{A} \setminus \overline{B} \subset \overline{A \setminus B}$.
8. Da un ejemplo donde $\overline{\bigcup_{\iota \in \mathcal{I}} A_\iota} \neq \bigcup_{\iota \in \mathcal{I}} \overline{A_\iota}$.
9. Sea D un subconjunto denso en un espacio topológico X. ï¿½Es cierto que $D \cap A$ es denso en A para cualquier subespacio A de X?
10. Si $U \subset X$ es abierto y $A \subset X$ es cualquier subconjunto, entonces $\overline{U \cap \overline{A}} = \overline{U \cap A}$.
11. Encuentra un ejemplo en el que $\operatorname{Int} A \subset \operatorname{Int} B$, pero $A \not\subset B$.
12. Demostrar directamente el teorema de Kuratowski (sin hacer referencia al teorema 3.2.5): Sea X un conjunto, $\alpha : 2^X \to 2^X$ una función que satisface:
    a) $\alpha(\emptyset) = \emptyset$
    b) $\alpha(A \cup B) = \alpha(A) \cup \alpha(B)$
    c) $\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$
    d) $A \subset \alpha(A)$
    Entonces, existe una única topología τ en X, tal que $\alpha(A) = \overline{A}$, donde $\overline{A}$ denota la cerradura de A respecto a τ.
13. Sea (X, τ) un espacio topológico en el que
    $$\operatorname{Int}(A \cup B) = \operatorname{Int} A \cup \operatorname{Int} B,$$
    para cualesquiera dos subconjuntos A y B de X. Demostrar que τ es la topología discreta.
14. Sean τ y μ topologías en un conjunto X. Demostrar que $\tau \subset \mu$ si y sólo si para todo $A \subset X$. $\operatorname{Int}_\tau A \subset \operatorname{Int}_\mu A$.

15. Sea (X, τ) un conjunto infinito dotado de la topologï¿½a cofinita, y $A \subset X$ un conjunto infinito. Demuestra que A es denso en X.
16. Una progresión aritmética en $\mathbb{Z}$ es un conjunto
$$A_{a,b} = \{\dots, a-2b, a-b, a, a+b, a+2b, \dots\}$$
con $a, b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$. Probar que el conjunto de todas las progresiones aritméticas
$$\mathcal{A} = \{A_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$$
es base para alguna topología en $\mathbb{Z}$. La topología resultante se conoce como la **topología de la progresión aritmética** en $\mathbb{Z}$.
17. Sea $\{\tau_t \mid t \in T\}$ una familia de topologías en un conjunto X. Demostrar que $\Gamma = \bigcup\{\tau_t \mid t \in T\}$ puede generar una topología en X como sub-base, pero no necesariamente como base.
18. Sea $\Gamma = \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. ï¿½Quï¿½ topología genera Γ como sub-base?
19. Demostrar que se puede construir una base local $\mathcal{B}_p$ en cada punto $p \in \mathbb{Q}$ de tal modo que $\bigcup\{\mathcal{B}_p \mid p \in \mathbb{Q}\}$ no sea base de $\mathbb{R}$.
20. Sean B_1 y B_2, bases para la misma topología τ en un conjunto X. Probar que la familia
$$\mathcal{B} = \{U \in B_1 \mid \text{ existe } V \in B_2, \text{ tal que } U \subset V\}$$
también es base para τ.
21. Sean B_1 y B_2, bases para la misma topología τ en un conjunto X. Probar que la familia
$$\mathcal{B} = \{U \in B_1 \mid \text{ existen } V, W \in B_2 \text{ tales que } V \subset U \subset W\}$$
también es base para τ.
22. Demuestra que si d es una mï¿½trica en X, entonces $d_1 : X \times X \to \mathbb{R}$ y $d_2 : X \times X \to \mathbb{R}$ dadas por
$$d_1(x, y) = \text{mín}\{1, d(x, y)\}, \text{ y } d_2(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$
son dos mï¿½tricas en X que generan la misma topologï¿½a que d.
23. Sean $X = (0, 2)$ y $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\} \subset X$. Encuentra $\overline{A}$ en X.
24. Considera el plano euclidiano $\mathbb{R}^2$ y $A = \{(x, sen(1/x)) \mid x > 0\} \subset \mathbb{R}^2$. Encuentra la cerradura de A.
25. Determina en qué subespacio de $\mathbb{R}$, el conjunto $(0, 1]$ es abierto:
    a) $A = (0, \infty)$.
    b) $B = (-\infty, 1]$.
    c) $C = (0, 1]$.
    d) $D = [0, 1]$.
    e) $F = \{-1\} \cup (0, 1]$.

26. Sea $X = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$ con la topología inducida de la recta real. Describe los abiertos en este espacio.
27. Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$. Demuestra los siguientes enunciados:
    a) Si A es cerrado en X, entonces un conjunto $B \subset A$ es cerrado en A si y sólo si B es cerrado en X.
    b) Si A es abierto en X, entonces un conjunto $B \subset A$ es abierto en A si y sólo si B es abierto en X.
28. Sean A, B, C subespacios de X tales que $C \subset A \cap B$. Prueba que C es abierto en $A \cup B$ si es abierto en A y en B. Prueba que C es cerrado en $A \cup B$ si es cerrado en A y en B.
29. Demuestra que el plano de Niemytzki (ver Ejemplo 3.7.4) es primero numerable pero no segundo numerable.
30. Demuestra que la recta de Sorgenfrey no es un espacio metrizable.
31. Demuestra que el plano de Niemytzki no es un espacio metrizable.

Capítulo 4

Funciones Continuas y Operaciones con Espacios Topológicos

4.1. Funciones Continuas

En el capítulo 1 introdujimos la noción de continuidad de funciones entre espacios métricos. En esta sección, generalizaremos este concepto para hablar de funciones continuas entre espacios topológicos.

Definición 4.1.1. *Sean X y Y dos espacios topológicos, $f : X \to Y$ una función y $x \in X$. Se dice que f es* ***continua en*** *x si para toda vecindad U de $f(x)$ existe una vecindad V de x tal que $f(V) \subset U$.*

Si $f : X \to Y$ es continua en cada $x \in X$, se dice que f es ***continua en*** *X.*

Teorema 4.1.2. *Sea $f : X \to Y$ una función entre dos espacios topológicos X y Y. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *f es continua.*
2. *Para todo subconjunto $B \subset Y$, $f^{-1}(\operatorname{Int} B) \subset \operatorname{Int} f^{-1}(B)$.*
3. *Para todo subconjunto abierto U de Y, $f^{-1}(U)$ es abierto en X.*

Demostración.
(1 ⇒ 2). Sean $B \subset Y$ y $x \in f^{-1}(\operatorname{Int} B)$. Entonces $f(x) \in \operatorname{Int} B$ y por tanto existe una vecindad U de $f(x)$ tal que $U \subset B$. Como f es continua en x, existe una vecindad V de x tal que $f(V) \subset U \subset B$. En consecuencia $V \subset f^{-1}(B)$, luego $x \in \operatorname{Int} f^{-1}(B)$. Como x era cualquier punto de $f^{-1}(\operatorname{Int} B)$, podemos concluir que $f^{-1}(\operatorname{Int} B) \subset \operatorname{Int} f^{-1}(B)$.

(2 ⇒ 3) Sea $U \subset Y$ abierto. Esto es $U = \operatorname{Int} U$, luego por hipótesis $f^{-1}(U) = f^{-1}(\operatorname{Int} U) \subset \operatorname{Int} f^{-1}(U)$. Además sabemos que $\operatorname{Int} f^{-1}(U) \subset f^{-1}(U)$, luego $\operatorname{Int} f^{-1}(U) = f^{-1}(U)$, así que $f^{-1}(U)$ es abierto.

(3 ⇒ 1) Sean $x \in X$ y U una vecindad de $f(x)$. Por hipótesis $V = f^{-1}(U)$ es abierto, y además $x \in V$. Así, V es una vecindad de x y claramente $f(V) \subset U$, con lo que queda demostrado que f es continua. □

Proposición 4.1.3. *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Entonces f es continua si y sólo si para todo subconjunto cerrado A de Y, $f^{-1}(A)$ es cerrado en X.*

DEMOSTRACIÓN. Probemos la parte 'sólo si'. Sea $A \subset Y$ un subconjunto cerrado de Y. Entonces $U = Y \setminus A$ es abierto en Y, y por el teorema 4.1.2 , $f^{-1}(U)$ es abierto en X. Pero

$$f^{-1}(U) = f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A),$$

por lo que $f^{-1}(A)$ es cerrado en X, como se quería demostar.

La parte 'si 'se demuestra de manera completamente análoga. □

Proposición 4.1.4. *Si X y Y son espacios topológicos y $f : X \to Y$ es una función entre ellos, entonces f es continua si y sólo si para todo $A \subset X$ se tiene $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.*

DEMOSTRACIÓN.

Probemos la suficiencia. En virtud de la proposición 4.1.3 basta verificar que las preimágenes bajo f de los subconjuntos cerrados de Y son, a su vez, subconjuntos cerrados de X. Sea pues $B \subset Y$ cerrado. Tenemos, por hipótesis, que

$$f(\overline{f^{-1}(B)}) \subset \overline{f(f^{-1}(B))} = \overline{B} = B = f(f^{-1}(B)),$$

por lo que necesariamente $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(B)$, y así $\overline{f^{-1}(B)} = f^{-1}(B)$, lo que se quería probar.

Probemos ahora la necesidad. Sea $A \subset X$. Notemos que $\overline{f(A)}$ es un subconjunto cerrado en Y, y por la proposición 4.1.3, $f^{-1}(\overline{f(A)})$ es cerrado en X. Por otro lado, como $f(A) \subset \overline{f(A)}$, tenemos que $A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$. Así, $f^{-1}(\overline{f(A)})$ es un subconjunto cerrado que contiene a A, de donde $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$. De aquí se obtiene

$$f(\overline{A}) \subset f\big(f^{-1}(\overline{f(A)})\big) \subset \overline{f(A)},$$

como se quería demostrar. □

Ejemplos 4.1.1.

1. Sean X un espacio topológico discreto y Y cualquier espacio topológico. Entonces toda función $f : X \to Y$, es continua en X. En efecto, si U es un abierto arbitrario en Y, entonces la preimagen $f^{-1}(U)$ es abierto en X ya que todos los subconjuntos de X son abiertos.
2. Sean X cualquier espacio topológico y Y un espacio topológico antidiscreto. Entonces toda función $f : X \to Y$ es continua en X. En efecto, como los únicos abiertos en Y son Y y $\emptyset$, las preimágenes bajo f de dichos conjuntos serán X y $\emptyset$ respectivamente, que son abiertos en X.

Teorema 4.1.5. *Sean X y Y dos espacios topológicos, $f : X \to Y$ una función, $\mathcal{B}_Y$ una base para la topología de Y y Γ_Y una sub-base que genera a $\mathcal{B}_Y$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. f es continua.
2. Para todo $V \in \Gamma_Y$, $f^{-1}(V)$ es abierto en X.
3. Para todo $U \in \mathcal{B}_Y$, $f^{-1}(U)$ es abierto en X.

Demostración.

$(1 \Rightarrow 2)$. Como cada elemento U de Γ es abierto en Y, se sigue del toerema 4.1.2 que $f^{-1}(U)$ es abierto en X.

$(2 \Rightarrow 3)$. Sea $U \in \mathcal{B}_Y$. Como Γ_Y es sub-base que genera a $\mathcal{B}_Y$, U tiene la forma $U = \bigcap_{i=1}^{n} V_{\gamma i}$, donde $V_{\gamma_i} \in \Gamma_Y$. Consecuentemente

$$f^{-1}(U) = f^{-1}\Big(\bigcap_{i=1}^{n} V_{\gamma_i}\Big) = \bigcap_{i=1}^{n} f^{-1}(V_{\gamma_i}).$$

Pero, por hipótesis, $f^{-1}(V_{\gamma_i})$ es abierto en X y como la intersección finita de subconjuntos abiertos es abierta, inferimos que $f^{-1}(U)$ es abierto en X.

$(3 \Rightarrow 1)$. Si $W \subset Y$ es un subconjunto abierto de Y, entonces existe $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}} \subset \mathcal{B}_Y$, tal que $W = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha$. Por hipótesis, $f^{-1}(U_\alpha)$ es abierto en X, de donde

$$f^{-1}(W) = f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} f^{-1}(U_\alpha)$$

es abierto en X. Por el teorema 4.1.2, esto implica que f es una función continua. $\square$

En los siguientes ejemplos usaremos el teorema anterior para verificar la continuidad de una función.

Ejemplos 4.1.2.

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x$. La preimagen de cualquier abierto básico $(a, b) \subset \mathbb{R}$ es $f^{-1}((a, b)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b,\ y \in \mathbb{R}\}$, que es un abierto de $\mathbb{R}^2$. Por lo tanto f es una función continua.

   Sean $(\mathbb{R}, \tau)$ la recta real y $(\mathbb{R}, \sigma)$ la recta de Sorgenfrey.

2. $f : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \sigma)$ dada por $f(x) = x$, no es continua. En efecto, $f^{-1}([x, w)) = [x, w)$ no es un subconjunto abierto de $(\mathbb{R}, \tau)$, mientras que $[x, w)$ es un abierto en $(\mathbb{R}, \sigma)$.

3. $g : (\mathbb{R}, \sigma) \to (\mathbb{R}, \tau)$ dada por $g(x) = x$ sí es continua, ya que $\mathcal{B} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ es una base para $(\mathbb{R}, \tau)$ y $g^{-1}\big((a, b)\big) = (a, b)$ es abierto en la recta de Sorgenfrey.

La siguiente proposición es una generalización del ejemplo anterior. La demostración queda como ejercicio al lector.

Proposición 4.1.6. *Sean τ_1 y τ_2 dos topologías en un conjunto X. Entonces la función identidad $Id : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ es continua si y sólo si τ_1 es más fina que τ_2.*

Proposición 4.1.7. *Sean X, Y y Z espacios topológicos y $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ dos funciones continuas. Entonces la composición $g \circ f : X \to Z$ es continua.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $U \subset Z$ un subconjunto abierto. Como g es continua, por el teorema 4.1.2, $g^{-1}(U)$ es abierto en Y. Como f también es continua, $f^{-1}(g^{-1}(U))$ es abierto en X, pero $(g \circ f)^{-1} = f^{-1}(g^{-1}(U))$ por lo que $g \circ f$ es continua. □

Definición 4.1.8. *Sean X, Y conjuntos, $A \subset X$ y $f : X \to Y$ una función. Definimos la **restricción** de f en A, denotada por $f|_A$, como la función $f|_A : A \to Y$ dada por $f|_A(a) = f(a)$ para cada $a \in A$.*

Proposición 4.1.9. *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre dos espacios topológicos. Entonces, para cualquier subconjunto $A \subset X$, la función $f|_A : A \to Y$ es continua en el subespacio topológico A.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $U \subset Y$ un conjunto abierto. Entonces,

$$(f|_A)^{-1}(U) = \{a \in A \mid f(a) \in U\} = A \cap f^{-1}(U).$$

Como f es continua, $f^{-1}(U)$ es abierto en X, lo cual implica que $f|_A^{-1}(U) = A \cap f^{-1}(U)$ es abierto en A. Así, $f|_A$ es continua en A, como se quería demostrar. □

Teorema 4.1.10. *Si $X = A \cup B$, donde A y B son ambos abiertos (respectivamente, cerrados) en X, y $f : X \to Y$ es una función tal que $f|_A$ y $f|_B$ son continuas, entonces f es continua.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que A y B son abiertos. Si $U \subset Y$ es abierto, entonces $\big(f|_A\big)^{-1}(U)$ y $\big(f|_B\big)^{-1}(U)$ son abiertos en A y B respectivamente, como A y B son subespacios abiertos, $\big(f|_A\big)^{-1}(U)$ y $\big(f|_B\big)^{-1}(U)$ son abiertos en X. Entonces, como

$$f^{-1}(U) = \left(f|_A\right)^{-1}(U) \cup \left(f|_B\right)^{-1}(U)\,,$$

concluimos que $f^{-1}(U)$ es abierto en X y por lo tanto f es continua.

La prueba en el caso en que A y B son cerrados es completamente análoga.

□

4.2. Funciones abiertas y funciones cerradas

En esta sección introduciremos los conceptos de *función abierta* y *función cerrada*. Como veremos más adelante, esta clase de funciones desempeñará un papel muy importante en el estudio de espacios topológicos.

Definición 4.2.1. *Sea $f : X \to Y$ una función entre dos espacios topológicos. Se dice que f es* ***abierta*** *si para cualquier abierto U en X, su imagen $f(U)$ es abierto en Y. De igual manera, se dice que f es* ***cerrada****, si para cualquier cerrado A en X, su imagen $f(A)$ es cerrado en Y.*

A continuación veremos algunos ejemplos de funciones abiertas y cerradas.

Ejemplos 4.2.1.

1. Para cualquier espacio topológico X, la función identidad es abierta y cerrada.
2. Sean X un espacio topológico y Y un espacio discreto. Entonces cualquier función $f : X \to Y$ es abierta y cerrada.

El que una función sea abierta (cerrada) no implica que sea cerrada (abierta), como veremos en los siguientes ejemplos.

Ejemplos 4.2.2.

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la proyección a la primera coordenada. La función f no es cerrada, pues $A = \{(x, 1/x) \mid x > 0\}$ es un cerrado de $\mathbb{R}^2$ pero su imagen $f(A) = (0, \infty)$ no es un cerrado de $\mathbb{R}$.
2. Consideremos la recta real, entonces
   a) La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x$ es abierta y no es cerrada, ya que $f(\mathbb{R}) = (0, \infty)$, el cual no es cerrado en $\mathbb{R}$.
   b) La función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (-\infty, 0) \\ x & \text{si } x \in [0, \infty) \end{cases}$$

no es abierta, ya que $g((-1,1)) = [0,1)$, el cual no es abierto en $\mathbb{R}$. Sin embargo, g es cerrada. En efecto, para un cerrado A en $\mathbb{R}$ tenemos dos casos:

- si $A \subset [0,\infty)$, entonces $g(A) = A$,
- Si $A \not\subseteq [0,\infty)$, entonces $g(A) = (A \cap [0,\infty)) \cup \{0\}$.

En cualquier caso, $g(A)$ es cerrado.

Proposición 4.2.2. *Sea $\mathcal{B}_X$ una base para un espacio topológico X y $f : X \to Y$ cualquier función a un espacio topológico Y. Entonces f es abierta si y sólo si para todo $U \in \mathcal{B}_X$, $f(U)$ es abierto en Y.*

Demostración. Claramente si f es una función abierta, $f(U)$ es abierto para todo $U \in \mathcal{B}_X$.

Ahora supongamos que la imagen bajo f de todo conjunto básico $U \in \mathcal{B}_X$ es abierta y demostremos que f es abierta. Sea V un subconjunto abierto de X. Entonces $V = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha$ con $U_\alpha \in \mathcal{B}_X$ para toda $\alpha \in \mathcal{A}$. Por hipótesis $f(U_\alpha)$ es abierto en Y para cada $\alpha \in \mathcal{A}$. De esta manera

$$f(V) = f\Big(\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha\Big) = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} f(U_\alpha),$$

por lo que $f(V)$ es abierto en Y, y por tanto f es abierta. □

Proposición 4.2.3. *Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ funciones entre espacios topológicos. Si f y g son funciones abiertas (cerradas), entonces la composición $g \circ f : X \to Z$ es una función abierta (cerrada).*

La demostración de este hecho es sencilla y se deja como ejercicio al lector.

Teorema 4.2.4. *Una función $f : X \to Y$ entre dos espacios topológicos X y Y es cerrada si y sólo si para todo $B \subset Y$ y para toda vecindad U de $f^{-1}(B)$, existe una vecindad V de B, tal que $f^{-1}(V) \subset U$.*

Demostración. Primero demostremos la parte "si". Sean $B \subset Y$ un subconjunto arbitrario y U una vecindad de $f^{-1}(B)$. Entonces $X \setminus U$ es cerrado en X y, por hipótesis, $f(X \setminus U)$ es cerrado en Y. Definamos el abierto $V = Y \setminus f(X \setminus U)$. Notemos que de $f^{-1}(B) \subset U$ se sigue que $f(X \setminus U) \subset Y \setminus B$ y, en consecuencia, B se encuentra contenido en V. Por otro lado, tenemos que

$$f^{-1}(V) = f^{-1}\big(Y \setminus f(X \setminus U)\big) = X \setminus f^{-1}\big(f(X \setminus U)\big) \subset X \setminus (X \setminus U) = U,$$

particularmente $f^{-1}(V) \subset U$. Entonces V es el conjunto buscado.

Ahora demostremos la parte "sólo si". Sea F cerrado en X, entonces $U = X \setminus F$ es abierto en X. Además el conjunto $B = Y \setminus f(F)$ cumple

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus f(F)) = X \setminus f^{-1}(f(F)) \subset X \setminus F = U.$$

Por hipótesis, podemos encontrar un subconjunto V abierto en Y, tal que $B \subset V$ y $f^{-1}(V) \subset U$. Entonces $f^{-1}(V) \subset X \setminus F$, por lo que $f^{-1}(V) \cap F = \emptyset$, y por tanto, $V \cap f(F) = \emptyset$. Esto implica que $V \subset Y \setminus (f(F))$. Pero $B \subset V$, por lo que $B = Y \setminus f(F) \subset V \subset Y \setminus f(F)$, y por tanto, $V = Y \setminus f(F)$. Consecuentemente $f(F)$ es cerrado en Y. Así, queda demostrado que f es una función cerrada. $\square$

Teorema 4.2.5. *Una función $f : X \to Y$ entre dos espacios topológicos X y Y, es abierta si y sólo si para todo $B \subset Y$ y para todo subconjunto U cerrado en X que contenga a $f^{-1}(B)$, existe un subconjunto cerrado V, que contiene a B, tal que $f^{-1}(V) \subset U$.*

La demostración de este teorema es análoga a la del teorema 4.2.4, y se deja como ejercicio al lector.

4.3. Homeomorfismos

En esta sección introduciremos uno de los conceptos más importantes en la topología. Quizá el lector haya estudiado en los cursos de álgebra la idea de *isomorfismo*, una función biyectiva entre dos grupos o entre dos espacios vectoriales que preserva la estructura algebraica. Pues bien, el equivalente en topología es el *homeomorfismo*, una función biyectiva entre dos espacios topológicos que preserva la *estructura topológica*. Veamos de manera más formal qué quiere decir esto.

Definición 4.3.1. *Sean X y Y dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Se dice que f es* ***homeomorfismo*** *si se satisfacen los siguientes enunciados:*

1. *f es biyectiva,*
2. *f es continua,*
3. *f^{-1} es continua.*

Diremos que los espacios X y Y son ***homeomorfos*** *(denotado por $X \cong Y$) si existe un homeomorfismo $f : X \to Y$.*

Ejemplos 4.3.1.

1. La función identidad $1_X : X \to X$ es un homeomorfismo.
2. Los espacios $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ y $\mathbb{R}$ son homeomorfos. En efecto, la función $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \tan x$ es un homeomorfismo. Cabe notar que en este caso la métrica no se preserva, es decir, los dos

espacios son métricos, pero en un caso la métrica no es acotada y en otro sí. Sin embargo los espacios poseen esencialmente la misma reserva de conjuntos abiertos.

3. Si a, b, c y d son números reales tales que $a < b$ y $c < d$, los intervalos $[a, b]$ y $[c, d]$ son homeomorfos. Por ejemplo, la función f definida por

$$f(x) = \frac{d-c}{b-a}x + \frac{cb-da}{b-a}$$

es un homeomorfismo entre ambos espacios.

La función aquí definida también realiza un homeomorfismo entre los espacios (a, b) y (c, d), así como entre los espacios $(a, b]$ y $(c, d]$. De manera análoga se puede demostrar que los intervalos $[a, b)$ y $(a, b]$ son homeomorfos. Por otro lado, los intervalos $[0, 1]$, $[0, 1)$ y $(0, 1)$ no son homeomorfos entre sí. La demostración no es evidente en este momento, pero a lo largo del texto iremos generando herramientas que nos permitirán dar una demostración sencilla de este hecho.

Teorema 4.3.2. *Sea $f : X \to Y$ una función biyectiva entre dos espacios topológicos. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *f es un homeomorfismo.*
2. *f es continua y cerrada.*
3. *f es continua y abierta.*

La demostración queda como ejercicio para el lector.

Teorema 4.3.3. *La relación de homeomorfismo $\cong$ es una relación de equivalencia (es decir, es reflexiva, simétrica y transitiva).*

Demostración. Notemos que para cualquier espacio topológico X, la función identidad $1_X : (X, \tau) \to (X, \tau)$ es un homeomorfismo, con lo cual $X \cong X$ y por lo tanto $\cong$ es reflexiva.

Por otro lado, si X y Y son espacios topológicos tales que $X \cong Y$, entonces existe un homeomorfismo $f : X \to Y$. Como la función inversa $f^{-1} : Y \to X$ es continua y biyectiva y $(f^{-1})^{-1} = f$, inferimos que f^{-1} es un homeomorfismo. Así que $Y \cong X$, quedando demostrado que $\cong$ es simétrica.

Por último, consideremos X, Y y Z espacios topológicos, tales que $X \cong Y$ y $Y \cong Z$. Entonces existen dos homeomorfismos, $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$. Como la composición de funciones continuas, abiertas y biyectivas es continua, abierta y biyectiva, la función $g \circ f : X \to Z$ es un homeomorfismo. Concluimos que $X \cong Z$, por lo que $\cong$ es una relación transitiva. $\square$

Como la relación de homeomorfismo $\cong$ es de equivalencia, $\cong$ induce una partición en la clase de todos los espacios topológicos. La clase $[X] = \{Y \mid Y \cong X\}$ de equivalencia de un espacio X recibe el nombre de **tipo topológico** de X.

Diremos que una propiedad $\mathcal{P}$ es **topológica** o es un **invariante topológico** si para cualesquiera dos espacios X y Y homeomorfos, X satisface la propiedad $\mathcal{P}$ si y sólo si Y satisface la propiedad $\mathcal{P}$. Claramente la cardinalidad de un espacio X es un invariante topológico. Otro ejemplo de invariante topológico es el peso, como veremos a continuación.

Ejemplos 4.3.2.

1. Tener base numerable es una propiedad topológica. Ser separable también es una propiedad topológica.
2. La propiedad de ser un conjunto acotado en $\mathbb{R}$ no es topológica, pues $(-\pi/2, \pi/2)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$.
3. Sea $Y = \ell_2$ el conjunto de todas las sucesiones tales que la suma del cuadrado de sus entradas converge, equipado con la métrica $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i \in \mathbb{N}} (y_i - x_i)^2}$. Y es separable, pues las sucesiones con entradas racionales que son eventualmente cero forman un subconjunto denso y numerable. En el ejemplo 3.7.3, se demostró que el espacio X de todas las sucesiones acotadas no es separable. Así, resulta claro que éstos espacios no son homeomorfos.

Proposición 4.3.4. *El peso de un espacio es un invariante topológico.*

Demostración. Sean X y Y dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ un homeomorfismo. Sea $\mathcal{B}$ una base para la topología de X. Definamos $\mathcal{B}' = \{f(U) \mid U \in \mathcal{B}\}$ y demostremos que $\mathcal{B}'$ es base para la topología de Y.

Primero notemos que como f es abierta, cada $f(U)$ es abierto en Y, por lo que $\mathcal{B}$ es una familia de conjuntos abiertos de Y. Ahora consideremos $y \in Y$ y una vecindad W de y. Como f es continua $f^{-1}(W)$ es abierto en X; además $f^{-1}(y) \in f^{-1}(W)$. Como $\mathcal{B}$ es base, existe $U_\alpha \in \mathcal{B}$, tal que $f(y) \in U_\alpha \subset f^{-1}(W)$. Así, $f(U_\alpha) \in \mathcal{B}'$ y $y \in f(U_\alpha) \subset W$, lo cual demuestra que $\mathcal{B}'$ es base para la topología de Y. Observemos que los conjuntos $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ tienen la misma cardinalidad. Esto implica que $\omega(Y) \leq \omega(X)$. De manera análoga se demuestra que $\omega(X) \leq \omega(Y)$, de donde podemos concluir que los espacios X y Y tienen el mismo peso.

$\square$

Definición 4.3.5. *Sean X y Y dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Se dice que f es un* ***encaje topológico*** *si $f : X \to f(X)$ es un homeomorfismo.*

Ejemplo 4.3.3. Sean n y m dos números naturales, donde $n < m$. Entonces, la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dada por

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$$

es un encaje topológico.

4.4. Productos finitos de espacios topológicos

Proposición 4.4.1. *Sea $\{(X_i, \tau_i)\}_{i=1}^n$ una colección finita de espacios topológicos. consideramos el producto cartesiano $\prod\limits_{i=1}^n X_i$, es decir, el conjunto*

$$\prod_{i=1}^n X_i = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in X_i\}.$$

Sea $\mathcal{B} = \{U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n \mid U_i \in \tau_i\}$. Entonces $\mathcal{B}$ es base para una única topología τ en X la cual recibe el nombre de ***topología producto****. El espacio topológico (X, τ) se llama* ***producto topológico****, o simplemente* ***producto*** *de los espacios X_i.*

Demostración. Según el teorema 3.5.4, basta demostrar que $\mathcal{B}$ satisface las propiedades $\mathcal{B}1$ y $\mathcal{B}2$ de una base. Como cada X_i es elemento de τ_i, y $X = \prod\limits_{i=1}^n X_i$ inferimos que $X \in \mathcal{B}$, satisfaciéndose la propiedad ($\mathcal{B}1$).

Por otro lado, si $U = \prod\limits_{i=1}^n U_i$ y $V = \prod\limits_{i=1}^n V_i$ son dos elementos de $\mathcal{B}$ con intersección no vacía, entonces como cada $U_i \cap V_i \in \tau_i$, tenemos que

$$U \cap V = \big(\prod_{i=1}^n U_i\big) \cap \big(\prod_{i=1}^n V_i\big) = \prod_{i=1}^n (U_i \cap V_i) \in \mathcal{B}.$$

De donde $\mathcal{B}$ satisface la propiedad ($\mathcal{B}2$) y por lo tanto existe una única topología τ para la cual $\mathcal{B}$ es base. $\square$

Ejemplos 4.4.1.

1. El espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ es homeomorfo al producto topológico de n copias de la recta real:
$$\mathbb{R}^n = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{R}_i,$$
donde cada $\mathbb{R}_i = \mathbb{R}$.
2. Sea $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid\ x^2+y^2 = 1\}$ el círculo o la esfera de dimensión 1. El producto $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ recibe el nombre **toro 2-dimensional**, y suele denotarse por T^2. Más adelante veremos otra forma de construir el toro.
3. Si X es un espacio topológico e $\mathbb{I}$ denota el intervalo $[0, 1]$, entonces el espacio producto $X \times \mathbb{I}$ es llamado **cilindro sobre** X.

4.5. Producto de Tychonoff

Definición 4.5.1. *Sean $\mathcal{A}$ un conjunto de índices y $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una colección de conjuntos no vacíos. El **producto cartesiano** de los conjuntos X_α, es el conjunto de todas las funciones $x : \mathcal{A} \to \bigsqcup_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$ tales que $x(\alpha) \in X_\alpha$ para cada $\alpha \in \mathcal{A}$. Este conjunto se suele denotar por $\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$.*

*Para cada $x \in \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$ y para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, el valor $x(\alpha)$ lo llamaremos la $\alpha-$**ésima cordenada** de x.*

En la práctica, se suele denotar la $\alpha-$ésima cordenada de x, por x_α. Además, por conveniencia, en algunas ocasiones denotaremos a la función x por $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$, o simplemente por (x_α) si no hay riesgo de confusión.

Nota 4.5.2. *En realidad, para asegurarse de que el producto de una colección infinita de conjuntos no es vacío se usa el axioma de elección; de hecho esta afirmación y el axioma de elección son equivalentes.*

Si cada X_α es a su vez un espacio topológico, nos gustaría proveer al producto $\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$ de una topología que generalice el producto finito de espacios topológicos. En realidad existen varias formas de hacerlo. En primera instancia, uno podría pensar que la topología más convenienete es la que generan los conjuntos de la forma $\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha$, donde cada U_α es abierto en X_α. Esta topología recibe el nombre de **topología *caja***. Sin embargo, esta topología no es la más conveniente. A continuación veremos la manera que más se utiliza de topologizar al producto cartesiano.

Definición 4.5.3. *Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una familia de espacios topológicos indexados por un conjunto cualquiera de índices $\mathcal{A}$. Sea Γ el conjunto de todos los subconjuntos de $\prod\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$ de la forma*

$$\langle U_{\alpha_0}\rangle = \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha,$$

*donde U_{α_0} es un subconjunto abierto en X_{α_0} y $U_\alpha = X_\alpha$ si $\alpha \neq \alpha_0$. La topología en $\prod\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$ generada por Γ como sub-base recibe el nombre de **topología de Tychonoff** o **topología producto**. El espacio $\prod\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$ provisto de dicha topología se llama **producto de Tychonoff** o **producto topológico** de los espacios X_α, $\alpha\in\mathcal{A}$.*

Observemos que la base generada por Γ como sub-base, es la colección de todos los subconjuntos de la forma $U = \prod\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha$, en donde U_α es abierto en X_α y $U_\alpha = X_\alpha$ salvo para un número finito de indices en $\mathcal{A}$, digamos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. En otras palabras, $U = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \langle U_{\alpha_i}\rangle$, y lo denotaremos de la siguiente forma

$$U = \langle U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \ldots, U_{\alpha_n}\rangle.$$

Los conjuntos $\langle U_\alpha\rangle$ se llaman sub-básicos canónicos y los conjuntos $\langle U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \ldots, U_{\alpha_n}\rangle$ se llaman básicos canónicos.

Cuando el conjunto $\mathcal{A}$ es un finito, la topología de Tychonoff coincide con la topología producto de la sección anterior. Por esta razón, todas las proposiciones y teoremas que se vean en esta sección serán válidas para el caso en el que $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ sea una familia finita de espacios topológicos.

Definición 4.5.4. *Sea $\prod\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$ el producto topológico de una familia $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ de espacios topológicos. Para cada $\beta\in\mathcal{A}$, la función $\pi_\beta : \prod\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha \to X_\beta$ dada por*

$$\pi_\beta\big((x_\alpha)\big) = x_\beta$$

*se llama la $\beta-$**ésima proyección**.*

Proposición 4.5.5. *Toda proyección $\pi_\beta : \prod\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha \to X_\beta$, $\beta\in\mathcal{A}$, es una función continua y abierta.*

Demostración. Para demostrar que π_β es continua, simplemente notemos que si U_β es un abierto arbitrario en X_β, tenemos que

$$\pi_\beta^{-1}(U_\beta) = \Big\{x \in \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha \,|\, x_\beta \in U_\beta\Big\} = \langle U_\beta\rangle,$$

el cual es abierto en $\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$. Así, π_β es continua.

Por otro lado, para demostrar que π_β es una función abierta, en virtud de la proposición 4.2.2, basta demostrar que la imagen de cualquier abierto básico canónico es abierta. Sea pues $U = \langle U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}\rangle$ un abierto básico en $\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$. Entonces $\pi_\beta(U) = U_\beta$ que por definición de $\langle U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \ldots, U_{\alpha_n}\rangle$ es abierto en X_β, lo que nos permite concluir que π_β es una función abierta. $\square$

Proposición 4.5.6. *La topología de Tychonoff es la topología más débil que hace continuas todas las proyecciones* $\pi_\beta : \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha \to X_\beta$.

Demostración. Sea $X = \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$ y denotemos por τ_T la topología de Tychonoff en X. En la proposición anterior vimos que respecto a τ_T todas las proyecciones son continuas.

Supongamos que existe una topología τ en X tal que todas las proyecciones $\pi_\beta : X \to X_\beta$ son continuas. Entonces, para cualquier $\alpha \in \mathcal{A}$ y para cualquier abierto $U_\alpha \subset X_\alpha$, se tiene que $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) = \langle U_\alpha\rangle \in \tau$. Así, τ es una topología que contiene todos los elementos sub-básicos de τ_T. En conclusión $\tau_T \subset \tau$, como se quería demostrar. $\square$

El siguiente teorema nos permite determinar fácilmente cuándo una función de un espacio topológico a un producto topológico es continua.

Teorema 4.5.7. *Sean Y un espacio topológico, $X = \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$ el producto de Tychonoff de una familia de espacios topológicos y $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ la $\alpha-$ésima proyección. Entonces, $f : Y \to X$ es continua si y sólo si la composición $\pi_\alpha \circ f$ es continua para toda $\alpha \in \mathcal{A}$.*

Demostración. Si f es una función continua, entonces $\pi_\alpha \circ f$ es continua por ser composición de dos funciones continuas.

Ahora supongamos que $\pi_\alpha \circ f$ es continua para cada $\alpha \in \mathcal{A}$. Para demostrar que f es continua, basta demostrar que la preimagen de cualquier abierto sub-básico de X es abierta en Y. Sea pues $\langle U_{\alpha_0}\rangle$ un abierto sub-básico en X. Entonces

$$f^{-1}(\langle U_{\alpha_0}\rangle) = \{y \in Y \mid f(y) \in \langle U_{\alpha_0}\rangle\} = \{y \in Y \mid \pi_{\alpha_0}(f(y)) \in U_{\alpha_0}\} = (\pi_{\alpha_0}\circ f)^{-1}(U_{\alpha_0}).$$

Pero $\pi_{\alpha_0} \circ f$ es continua, por lo que $f^{-1}(U_{\alpha_0}) = (\pi_{\alpha_0} \circ f)^{-1}(U_{\alpha_0})$ es abierto en Y. De esta manera queda demostrado que f es una función continua. $\square$

Teorema 4.5.8 (Conmutatividad del producto)**.** *Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una familia de espacios topológicos. Si $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ es una biyección, entonces*

$$\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha \cong \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_{\phi(\alpha)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $X = \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$. Para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, denotemos $Y_\alpha = X_{\phi(\alpha)}$ y llamemos $Y = \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} Y_\alpha$. Definamos las funciones $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ por

$$f\big((x_\alpha)\big) = (x_{\phi(\alpha)})$$
$$g\big((y_\alpha)\big) = (y_{\phi^{-1}(\alpha)}).$$

Notemos que para toda $(x_\alpha) \in X$,

$$g \circ f\big((x_\alpha)\big) = g\big(f\big((x_\alpha)\big)\big) = g\big((x_{\phi(\alpha)})\big) = (x_{\phi^{-1}(\phi(\alpha))}) = (x_\alpha),$$

por lo que $g \circ f$ es la identidad en X.

Por otro lado, para toda $(y_\alpha) \in Y$,

$$f \circ g\big((y_\alpha)\big) = f\big(g\big((y_\alpha)\big)\big) = f\big((y_{\phi^{-1}(\alpha)})\big) = (y_{\phi(\phi^{-1}(\alpha))}) = (y_\alpha).$$

Entonces $f \circ g$ es la identidad en Y. Así, podemos concluir que tanto f como g son biyecciones y además $g = f^{-1}$.

Para completar la prueba, necesitamos demostrar que las funciones f y g son continuas. Para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, sean $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ y $\eta_\alpha : Y \to Y_\alpha$ las $\alpha-$ésima proyecciones. Por la proposición 4.5.5, tanto π_α como η_α son funciones continuas.

Notemos que para cada $\alpha_0 \in \mathcal{A}$, $\eta_{\alpha_0} \circ f = \pi_{\phi(\alpha_0)}$. En efecto, si $(x_\alpha) \in X$, entonces

$$\eta_{\alpha_0} \circ f\big((x_\alpha)\big) = \eta_{\alpha_0}\big(f\big((x_\alpha)\big)\big) = \eta_{\alpha_0}\big((x_{\phi(\alpha)})\big) = (x_{\phi(\alpha_0)}) = \pi_{\phi(\alpha_0)}\big((x_\alpha)\big).$$

Como las proyecciones η_{α_0} y $\pi_{\phi(\alpha_0)}$ son funciones continuas, entonces, según el teorema 4.5.7, f debe ser una función continua. Análogamente se prueba que $g = f^{-1}$ es una función continua. Así, f es un homeomorfismo entre X y Y, lo cual demuestra lo que queríamos.

□

Proposición 4.5.9 (Asociatividad del producto)**.** *Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una famimlia de espacios topológicos. Supongamos que el conjunto de índices está representado como unión ajena de sus subconjuntos A_i, $i \in \mathcal{I}$, esto es $\mathcal{A} = \bigsqcup_{\imath\in\mathcal{I}} \mathcal{A}_i$. Si $Y_i = \prod_{\alpha\in\mathcal{A}_i} X_\alpha$, entonces*

$$\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha \cong \prod_{i\in\mathcal{I}} Y_i.$$

DEMOSTRACIÓN. Llamemos $X = \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$ y $Y = \prod_{i\in\mathcal{I}} Y_i$. Para cada $i \in \mathcal{I}$, definamos la función $\phi_i : X \to Y_i$ por $\phi_i(x) = \{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}_i}$. Sea $\phi : X \to Y$ la

función dada por
$$\phi(x) = \{\phi_i(x)\}_{i\in\mathcal{I}}.$$

Veamos que ϕ define un homeomorfismo.

Primero notemos que si $x = \{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ y $y = \{y_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ son dos puntos distintos de X, entonces existe $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ tal que $x_{\alpha_0} \neq y_{\alpha_0}$. Como $\mathcal{A} = \bigsqcup_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{A}_i$, existe un único índice $i_0 \in \mathcal{I}$, tal que $\alpha_0 \in \mathcal{A}_{i_0}$ Así, $\phi_{i_0}(x) = \{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}_{i_0}} \neq \{y_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}_{i_0}} = \phi_{i_0}(y)$, lo cual nos garantiza que $\phi(x) \neq \phi(y)$ y por tanto ϕ es inyectiva.

Por otro lado, si $y = \{\{y_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}_i}\}_{i\in\mathcal{I}}$ es un punto arbitrario de Y, es claro que el punto $x = \{y_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ satisface $\phi(x) = y$. Por lo tanto, ϕ es suprayectiva. Así, ϕ es una biyección entre X y Y.

Para demostrar que ϕ es continua, por el teorema 4.5.7, basta demostrar que $\eta_i \circ \phi = \phi_i$ es continua para toda $i \in \mathcal{I}$, donde $\eta_i : Y \to Y_i$ es la proyección en la $i-$ésima coordenada. A su vez, en virtud del teorema 4.5.7, la continuidad de ϕ_i es equivalente a la continuidad de todas las composiciones $\mu^i_\beta \circ \phi_i$, donde $\mu^i_\beta : Y_i \to X_\beta$ es la proyección en la $\beta-$ésima coordenada, con $\beta \in \mathcal{A}_i$. Pero $\mu^i_\beta \circ \phi_i = \pi_\beta$, donde $\pi_\beta : X \to X_\beta$ es la $\beta-$ésima proyección, y por lo tanto es continua.

De manera similar, para probar la continuidad de la función $\phi^{-1} : Y \to X$, es suficiente ver que para todo índice $\alpha \in \mathcal{A}$, la composición $\pi_\alpha \circ \phi^{-1}$ es continua. Si $\alpha \in \mathcal{A}$, entonces existe un único $i_0 \in \mathcal{I}$, tal que $\alpha \in \mathcal{A}_{i_0}$. Así, es fácil ver que $\pi_\alpha \circ \phi^{-1} = \mu^{i_0}_\alpha \circ \eta_{i_0}$. Como las proyecciones η_{i_0} y $\mu^{i_0}_\alpha$ son continuas, la composición $\pi_\alpha \circ \phi^{-1} = \mu^{i_0}_\alpha \circ \eta_{i_0}$ lo es, y por tanto $\pi_\alpha \circ \phi^{-1}$ es continua, como se quería demostrar. □

Proposición 4.5.10. *Sean $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una familia de espacios topológicos. Para cada $\alpha \in \mathcal{A}$ sea B_α un subconjunto de X_α. Entonces*
$$\overline{\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} B_\alpha} = \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} \overline{B_\alpha}.$$

Demostración. Sea $\{x_\alpha\} \in \overline{\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} B_\alpha}$. Para demostrar que $\{x_\alpha\} \in \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} \overline{B_\alpha}$ basta probar que $x_\alpha \in \overline{B_\alpha}$ para cada $\alpha \in \mathcal{A}$. Sea $\beta \in \mathcal{A}$, y $U_\beta \subset X_\beta$ una vecindad de x_β. Entonces $\langle U_\beta \rangle = \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha$ es una vecindad de $\{x_\alpha\}$, por lo que
$$\emptyset \neq \langle U_\beta \rangle \cap \big(\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} B_\alpha\big) = \big(\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha\big) \cap \big(\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} B_\alpha\big) = \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} (U_\alpha \cap B_\alpha).$$
De donde podemos concluir que para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, $U_\alpha \cap B_\alpha \neq \emptyset$. En particular, $U_\beta \cap B_\beta \neq \emptyset$, lo cual demuestra que $x_\beta \in \overline{B_\beta}$ y por tanto $\{x_\alpha\} \in \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} \overline{B_\alpha}$.

Ahora consideremos cualquier $\{x_\alpha\} \in \prod\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} \overline{B_\alpha}$, y demostremos que $\{x_\alpha\} \in \overline{\prod\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} B_\alpha}$. Para ello, basta demostrar que cualquier vecindad básica U de $\{x_\alpha\}$, $U \cap \prod\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} B_\alpha \neq \emptyset$. Sea pues $U = \langle U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}\rangle$ una vecindad básica de $\{x_\alpha\}$. Entonces, para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, U_α es una vecindad de x_α en X_α. Como $x_\alpha \in \overline{B_\alpha}$, tenemos que $U_\alpha \cap B_\alpha \neq \emptyset$, de donde

$$U \cap \Big(\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} B_\alpha\Big) = \Big(\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha\Big) \cap \Big(\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} B_\alpha\Big) = \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} (U_\alpha \cap B_\alpha) \neq \emptyset.$$

Así $\{x_\alpha\} \in \overline{\prod\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} B_\alpha}$, como se quería demostrar. □

De la proposición anterior se siguen inmediatamente los siguientes corolarios.

Corolario 4.5.11. *Si para toda $\alpha \in \mathcal{A}$, B_α es un subconjunto cerrado en el espacio topológico X_α, entonces $\prod\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} B_\alpha$ es cerrado en $\prod\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$.*

Demostración. Como B_α es cerrado, tenemos que $\overline{B_\alpha} = B_\alpha$ para toda $\alpha \in \mathcal{A}$. Así, tenemos que

$$\overline{\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} B_\alpha} = \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} \overline{B_\alpha} = \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} B_\alpha.$$

En virtud del teorema 3.3.5, podemos concluir que $\prod\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} B_\alpha$ es un conjunto cerrado. □

Corolario 4.5.12. *Si B_α es un subconjunto denso en el espacio topológico X_α para toda $\alpha \in \mathcal{A}$, entonces $\prod\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} B_\alpha$ es denso en $\prod\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$.*

Demostración. Tenemos que $\overline{B_\alpha} = X_\alpha$ para toda $\alpha \in \mathcal{A}$. Luego, en virtud de la proposición 4.5.10, tenemos que

$$\overline{\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} B_\alpha} = \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} \overline{B_\alpha} = \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha,$$

lo cual significa que $\prod\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} B_\alpha$ es denso en $\prod\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$. □

A continuación veremos algunas propiedades que se preservan bajo el producto numerable de espacios topológicos.

Teorema 4.5.13. *Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia numerable de espacios topológicos. Si para cada $n \in \mathbb{N}$, X_n es primero numerable, entonces $\prod\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ es primero numerable.*

Demostración. Sea $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un punto arbitrario en $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$. Sabemos que para cada $x_n \in X_n$ existe una base local numerable, digamos, $\mathcal{B}_{x_n}$. Denotemos por $\mathcal{B}_x$ la colección de todos los abiertos canónicos de la forma $\langle U_{n_1}, U_{n_2}, \ldots, U_{n_k}\rangle$ con $U_{n_i} \in \mathcal{B}_{x_{n_i}}$. Es claro que $\mathcal{B}_x$ es una colección numerable. Veamos que es base local en x.

Consideremos una vecindad $W \subset X$ de x. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $W = \langle W_{n_1}, W_{n_2}, \ldots, W_{n_k}\rangle$ con W_{n_i} abierto en X_{n_i}. Como cada $\mathcal{B}_{x_{n_i}}$ es base local de x_{n_i} en X_{n_i}, podemos encontrar $U_{n_i} \in \mathcal{B}_{x_{n_i}}$ tal que $x_{n_i} \in U_{n_i} \subset W_{n_i}$. Así, $U = \langle U_{n_1}, U_{n_2}, \ldots U_{n_k}\rangle$ es un elemento de $\mathcal{B}_x$ tal que $x \in U \subset W$. Por lo tanto $\mathcal{B}_x$ sí es una base local numerable en x. De esta manera X es un espacio primero numerable. $\square$

El siguiente ejemplo nos muestra que es esencial que la colección de factores sea numerable para que su producto resulte primero numerable (si los espacios no son triviales).

Ejemplo 4.5.1. Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una familia no numerable de espacios topológicos no triviales (no antidiscretos). Entonces su producto $\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$ no es primero numerable.

En efecto, como cada X_α es no trivial, para cada $\alpha \in \mathcal{A}$ existe $U_\alpha \subset X_\alpha$ abierto con $U_\alpha \notin \{\emptyset, X_\alpha\}$. Sea $x = (x_\alpha)$ donde cada $x_\alpha \in U_\alpha$, y supongamos que existe una base local numerable $\mathcal{B}_x = \{V_1, V_2, \ldots\}$ para x. Para cada $V_i \in \mathcal{B}_x$ se tiene que $\pi_\alpha(V_i) = X_\alpha$ salvo para una colección finita de índices $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots \alpha_{i_{n_i}}$, y como $\mathcal{A}$ es no numerable, existe $\beta \in \mathcal{A}$ tal que $\beta \neq \alpha_{i_k}$ para todo $i \geq 1$, $k \in \{1, \ldots, n_i\}$.

$\langle U_\beta\rangle$ es vecindad de x, luego existe $V_i \in \mathcal{B}_x$ tal que $x \in V_i \subset U_\beta$, de donde $\pi_\beta(V_i) \subset \pi_\beta(\langle U_\beta\rangle) = U_\beta \neq X_\beta$ y en particular $\pi_\beta(V_i) \neq X_\beta$, una contradicción pues elegimos β de tal modo que $\pi_\beta(V_j) = X_\beta$ para todo $U_j \in \mathcal{B}_x$.

Teorema 4.5.14. *Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia numerable de espacios topológicos. Si para cada $n \in \mathbb{N}$, X_n es segundo numerable, entonces $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es segundo numerable.*

Demostración. Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia numerable de espacios topológicos. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\mathcal{B}_n$ una base numerable para el espacio X_n. Denotemos por $\mathcal{B}$ la colección de todos los abiertos canónicos de la forma $\langle U_{n_1}, U_{n_2}, \ldots U_{n_k}\rangle$ con $U_{n_i} \in \mathcal{B}_{n_i}$. La familia $\mathcal{B}$ es una base numerable para la topología producto. $\square$

Teorema 4.5.15. *Sean $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia numerable de espacios metrizables. Entonces su producto $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es metrizable.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea ρ_n una métrica que genere la topología de X_n. Para cada $n \geq 1$ consideramos la siguiente métrica acotada en X_n:

$$d_n(x_n, y_n) = \min\{1, \rho_n(x_n, y_n)\}$$

Es claro que $d_n(x_n, y_n) \leq 1$ para todo $x_n, y_n \in X_n$, y que la nueva métrica d_n genera la misma topología que ρ_n.

Consideremos la función $\rho : \prod_{n=1}^{\infty} X_n \times \prod_{n=1}^{\infty} X_n \to \mathbb{R}$ dada por

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n}.$$

Es fácil ver que ρ es una métrica en $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ y por lo tanto genera una topología en $\prod_{n=1}^{\infty}$, digamos τ_ρ. Denotemos por τ a la topología de Tychonoff del producto $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$y demostremos que $\tau = \tau_\rho$.

Para demostrar que $\tau \subset \tau_\rho$, en virtud de la proposición 4.5.6, basta demostrar que las proyeciones $\pi_k : (\prod_{n=1}^{\infty} X_n, \rho) \to (X_k, d_k),\ n \geq 1$ son continuas.

Sean $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Dada $k \in \mathbb{N}$ elijamos $0 < \delta < \varepsilon/2^k$. Ahora, si

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n} < \delta, \text{ entonces}$$

$$\frac{d_k(x_k, y_k)}{2^k} < \delta < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Por lo tanto $d_k(\pi_k(x), \pi_k(y)) = d_k(x_k, y_k) < \varepsilon$, quedando demostrada la continuidad de π_k.

Por otro lado, consideremos $U \in \tau_\rho$. Sea $x \in U$, entonces existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset U$. Luego, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{r}{4}.$$

Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, definamos $U_i \subset X_i$, por $U_i = B(x_i, \frac{r}{4})$. Sea $W_x = \langle U_1, U_2, \ldots U_n\rangle \in \tau$. Es claro que $x \in W_x$. Demostremos que $W_x \subset$

$B_\rho(x,r)$. Sea $y \in W_x$, entonces

$$\begin{aligned}\rho(x,y) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i(x_i,y_i)}{2^i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i(x_i,y_i)}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{d_i(x_i,y_i)}{2^i} \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{r/4}{2^i} + \frac{r}{4} = \frac{r}{4}\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} \ + \ 1\Big) < \frac{r}{4}(1+1) < r.\end{aligned}$$

Así, $y \in B(x,r) \subset U$. Consecuentemente, $W_x \subset U$, por lo que todo punto de U es punto interior en la topología τ. De esta forma podemos concluir que $\tau_\rho \subset \tau$, lo cual completa la demostración.

$\square$

4.6. Producto diagonal infinito de funciones

Definición 4.6.1. *Sean X un espacio topológico y $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una familia de espacios topológicos. Si $\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \to Y_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ es una familia de funciones, entonces la función*

$$F = \mathop{\triangle}_{\alpha\in\mathcal{A}} f_\alpha : X \to \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} Y_\alpha$$

dada por

$$F(x) = \{f_\alpha(x)\}_{\alpha\in\mathcal{A}} \text{ para cada } x \in X$$

*recibe el nombre de **producto diagonal** de $\mathcal{F}$.*

Proposición 4.6.2. *Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones como en la definición 4.6.1. El producto diagonal $F = \mathop{\triangle}_{\alpha\in\mathcal{A}} f_\alpha : X \to \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} Y_\alpha$ es continuo si y sólo si $f_\alpha : X \to Y_\alpha$ es continua para todo $\alpha \in \mathcal{A}$.*

Demostración. Notemos que para toda $\alpha \in \mathcal{A}$, $f_\alpha = \pi_\alpha \circ F$, donde $\pi_\alpha : \prod_{i\in\mathcal{A}} Y_i \to Y_\alpha$ denota la $\alpha-$ésima proyección. De esta manera, la demostración es una consecuencia directa del teorema 4.5.7. $\square$

Definición 4.6.3. *Sean X un espacio topológico y $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una familia de espacios topológicos. Se dice que una familia de funciones $\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \to Y_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ **separa puntos de X** si para cualquier par de puntos distintos x y y de X, existe una función $f_\alpha \in \mathcal{F}$ tal que $f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y)$.*

*Análogamente, se dice que $\mathcal{F}$ **separa puntos de conjuntos cerrados de** X, si para cualquier subconjunto cerrado $B \subset X$ y para cualquier punto $x \in X \setminus B$, existe $f_\alpha \in \mathcal{F}$, tal que $f_\alpha(x) \notin \overline{f_\alpha(B)}$.*

Teorema 4.6.4 (El Teorema de la Diagonal)**.** *Sea $\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \to Y_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una familia de funciones continuas. Si $\mathcal{F}$ separa puntos, entonces el producto* *diagonal*

$$F = \mathop{\triangle}_{\alpha\in\mathcal{A}} f_\alpha : X \to \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} Y_\alpha.$$

es inyectivo. Además, si $\mathcal{F}$ separa puntos de subconjuntos cerrados, entonces F es un encaje topológico.

Antes de demostrar el teorema, probaremos el siguiente lema.

Lema 4.6.5. *Sean X y Y dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua e inyectiva. Si la función f separa puntos de cerrados, entonces f es un encaje.*

Demostración. Sabemos que $f : X \to f(X)$ es una función continua y biyectiva. Para completar la demostración, es suficiente probar que para todo subconjunto cerrado B, su imagen $f(B)$ es cerrada en $f(X)$.

Es evidente que $f(B) \subset f(X) \cap \overline{f(B)}$, donde $\overline{f(B)}$ denota la cerradura de $f(B)$ en Y. Por otro lado, si $y = f(x) \in f(X) \setminus f(B)$, entonces $x \in X \setminus B$ ya que f es inyectiva. Como f separa puntos de subconjuntos cerrados, $f(x) \notin \overline{f(B)}$. De esta manera hemos demostrado que $f(X) \setminus f(B) \subset f(X) \setminus \overline{f(B)}$, de donde se sigue que $\overline{f(B)} \cap f(X) \subset f(B)$ y por tanto $f(B) = \overline{f(B)} \cap f(X)$. Como $\overline{f(B)}$ es cerrado en Y, inferimos que $f(B)$ es cerrado en $f(X)$, como se quería demostrar. ☐

Demostración del Teorema 4.6.4. Sean x y y dos puntos distintos de X. Como $\mathcal{F}$ separa puntos, existe $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ tal que $f_{\alpha_0}(x) \neq f_{\alpha_0}(y)$. Como consecuencia, tenemos que $F(x) \neq F(y)$, y por tanto, f es inyectiva.

Ahora supongamos que $\mathcal{F}$ separa puntos de subconjuntos cerrados. Afirmamos que la función F también separa puntos de subconjuntos cerrados. En efecto, si $B \subset X$ es cerrado en X y x es un punto tal que $F(x) \in \overline{F(B)}$, entonces para toda $\alpha \in \mathcal{A}$,

$$f_\alpha(x) = \pi_\alpha(f(x)) \in \pi_\alpha(\overline{F(B)}) \subset \overline{\pi_\alpha(F(B))} = \overline{f_\alpha(B)},$$

en donde la contención $\pi_\alpha(\overline{f(B)}) \subset \overline{\pi_\alpha(f(B))}$ tiene lugar gracias a la continuidad de la proyección $\pi_\alpha : \prod_{i\in\mathcal{A}} Y_i \to Y_\alpha$. Así, $f_\alpha(x) \in \overline{f_\alpha(B)}$ para todo $\alpha \in \mathcal{A}$, lo cual contradice al hecho que $\mathcal{F}$ separa puntos de cerrados. Por lo tanto, F separa puntos de cerrados, y según el lema 4.6.5, es un encaje. ☐

4.6.1. Producto directo de funciones.

Definición 4.6.6. *Sea $\{f_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una familia de funciones continuas entre espacios topológicos. Definimos $f = \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} f_\alpha : \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha \to \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} Y_\alpha$ como el* ***producto directo de funciones*** *dada por $f\big((x_\alpha)\big) = \big(f_\alpha(x_\alpha)\big)_{\alpha\in\mathcal{A}}$.*

Proposición 4.6.7. *La función f completa el diagrama conmutativo:*

$$\begin{array}{ccc} \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha & \xrightarrow{f} & \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} Y_\alpha \\ \downarrow{\scriptstyle p_\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle q_\alpha} \\ X_\alpha & \xrightarrow{f_\alpha} & Y_\alpha \end{array}$$

para toda $\alpha \in \mathcal{A}$, donde p_α y q_α son las proyecciones respectivas.

Proposición 4.6.8. *Si toda f_α es continua, entonces f es continua.*

Demostración. Según el teorema 4.5.7 basta ver que $q_i f$ es continua para toda $i \in \mathcal{A}$. Veamos entonces que,

$$q_i f\big((x_\alpha)\big) = q_i\big(f_\alpha(x_\alpha)\big) = f_i(x_i)$$

Así, si U es un abierto de Y_α, usando la conmutatividad del diagrama tenemos que $(q_\alpha f)^{-1}(U) = (f_\alpha p_\alpha)^{-1}(U) = p_\alpha^{-1}\big(f_\alpha^{-1}(U)\big)$, que es abierto gracias a la continuidad de p_α y f_α. $\square$

Proposición 4.6.9. *Si f es continua, entonces cada f_α es continua.*

Demostración. Sea $U \subset Y_\alpha$ abierto. Por la conmutatividad del diagrama $f_\alpha^{-1}(U) = p_\alpha f^{-1} q_\alpha^{-1}(U)$, lo cual es abierto ya que f y q_α son continuas y p_α es abierta. $\square$

4.7. Espacios Cociente

Existen varias maneras de abordar los espacios cocientes. En esta sección estudiaremos dos de ellas.

Proposición 4.7.1. *Sean X un espacio topológico, Y un conjunto no vacío y $q : X \to Y$ una función suprayectiva. Denotemos por τ_q la siguiente colección:*

$$\tau_q = \{U \subset Y \mid q^{-1}(U) \text{ es abierto en } X\}.$$

Entonces τ_q es una topología en Y. Además, τ_q es la topología más fina que hace a q continua.

Demostración. Es evidente que Y y $\emptyset$ son elementos de τ_q. Ahora, si $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ es una familia arbitraria de elementos de τ_q, entonces $q^{-1}(U_\alpha)$ es abierto en X para cada $\alpha \in \mathcal{A}$. Como consecuencia, $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} q^{-1}(U_\alpha)$ es abierto en X. Pero

$$\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} q^{-1}(U_\alpha) = q^{-1}\Big(\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha\Big),$$

por lo que $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha \in \tau_q$.

Ahora consideremos dos elementos cualesquiera de τ_q, U y V. Entonces $q^{-1}(U)$ y $q^{-1}(V)$ son abiertos en X, por lo que $q^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$ es abierto en X. Pero

$$q^{-1}(U) \cap q^{-1}(V) = q^{-1}(U \cap V).$$

Así, τ_q es una toplogía en Y respecto a la cual la función $q : X \to Y$ es continua.

Ahora supongamos que existe otra topología, τ', tal que $q : X \to (Y, \tau')$ es continua. Esto implica que para cualquier $V \in \tau'$, $q^{-1}(V)$ es abierto en X, por lo que $V \in \tau_q$. Así, $\tau' \subset \tau_q$, quedando demostrado que τ_q es la topología más fina que hace continua a q. $\square$

La proposición anterior nos permite llegar a la primera definición de espacio cociente.

Definición 4.7.2. *Sean X, Y, q y τ_q como en la proposición 4.7.1. En esta situación se dice que el espacio topológico (Y, τ_q) es un* ***espacio cociente*** *de X; la topología τ_q recibe el nombre de* ***topología cociente*** *inducida en Y por q, y la función q se llama* ***función cociente****.*

Ejemplo 4.7.1. Sea $X = [0, 1]$ y $Y = \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Definamos $q : X \to Y$ por $q(t) = e^{2\pi i t}$. Entonces $(\mathbb{S}^1, \tau_q)$ es un espacio cociente de X. Además, es fácil ver que τ_q coincide con la topología usual de $\mathbb{S}^1$.

La otra forma de estudiar los espacios cociente es la siguiente. Consideremos un espacio topológico X y una relación de equivalencia $\sim$ en X. Denotemos por $[x]$ la clase de equivalencia de x, es decir,

$$[x] = \{y \in X \mid x \sim y\}.$$

Llamemos $X/\sim$ al conjunto de todas las clases de equivalencia de X bajo la relación $\sim$. Sea $q : X \to X/\sim$ la proyección natural dada por

$$q(x) = [x]. \tag{12}$$

La idea es encontrar una topología en $X/\sim$ que haga continua a la función q. Evidentemente, q es una función suprayectiva, por lo que si definimos τ_q como en la proposición 4.7.1, el par $(X/\sim, \tau_q)$ es un espacio topológico y la función $q : X \to (X/\sim, \tau_q)$ es continua.

En esta situación, el par $(X/\sim, \tau_q)$ es el espacio cociente de X inducido por la relación $\sim$, y q es la función cociente.

Es evidente que ambas definiciones son equivalentes. En efecto, si Y es un espacio cociente de X inducido por alguna función suprayectiva, digamos q', entonces $Y \cong X/\sim$, donde $\sim$ es la relación de equivalencia en X dada por $x_1 \sim x_2$ si y sólo si $q'(x_1) = q'(x_2)$. Por otro lado, si $X/\sim$ es un espacio cociente inducido por la relación de equivalencia $\sim$, entonces $X/\sim$ coincide con el espacio cociente inducido por la función suprayectiva $q : X \to X/\sim$ definida en la ecuación (12).

A continuación veremos algunos ejemplos clásicos de espacios cociente.

Ejemplo 4.7.2. Sea $X = [0,1] \times [0,1]$ y $\sim_1$ la relación de equivalencia dada por $(x,y) \sim_1 (x',y')$ si y sólo si se cumple alguno de los siguientes enunciados.

1. $(x,y) = (x',y')$.
2. $y = y'$ y $|x - x'| = 1$.

El espacio cociente $X/\sim_1$ es un cilindro.

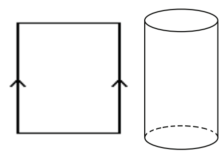


FIGURA 1. Identificación de un cilindro

Ejemplo 4.7.3. Sea $X = [0,1] \times [0,1]$ y $\sim_2$ la relación de equivalencia dada por $(x,y) \sim_2 (x',y')$ si y sólo si se cumple alguno de los siguientes enunciados.

1. $(x,y) = (x',y')$.
2. $y + y' = 1$, $\max\{x,x'\} = 1$ y $\min\{x,x'\} = 0$.

El espacio cociente $X/\sim_2$ recibe el nombre de **Banda de Möebius** (ver figura 2).

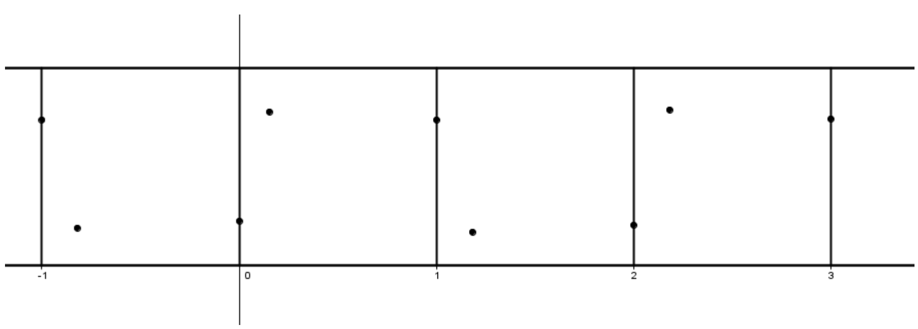


FIGURA 2. Identificación e imagen de una Banda de Möbius

Ejemplo 4.7.4. Sean $X = [0,1] \times [0,1]$ y $\sim_3$ la relación de equivalencia dada por $(x,y) \sim_3 (x',y')$ si y solo si se satisface alguno de los siguientes enunciados.

1. $(x,y) = (x',y')$.
2. $x = x'$ y $|y - y'| = 1$.
3. $y = y'$ y $|x - x'| = 1$.
4. $|y - y'| = 1$ y $|x - x'| = 1$.

El espacio cociente $X/\sim_3$ es el **Toro** (ver figura 3).

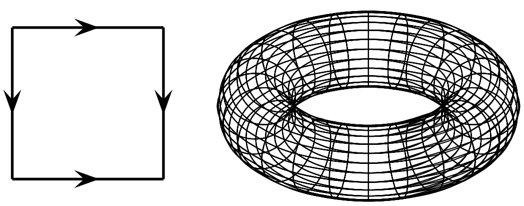


FIGURA 3. Identificación e imagen de un Toro

Ejemplo 4.7.5. Sea $X = [0,1] \times [0,1]$. Definamos la relación $\sim_4$ como sigue. $(x,y) \sim_4 (x',y')$ si y sólo si alguno de los siguientes enunciados se satisface

1. $(x,y) = (x',y')$.
2. $y + y' = 1$, $\min\{x,x'\} = 0$ y $\max\{x,x'\} = 1$.
3. $x = x'$, $\min\{y,y'\} = 0$ y $\max\{y,y'\} = 1$.

El espacio $X/\sim_4$ recibe el nombre de **Botella de Klein**

Ejemplo 4.7.6. Consideremos $X = \mathbb{S}^2$ la esfera 2 dimensional y $\sim_5$ la relación de equivalencia dada por $x \sim_5 y$ si y sólo si $x = y$ ó $x = -y$. El espacio $X/\sim_5$ se le conoce como **plano Proyectivo** o **bonete** (ver figura 5).

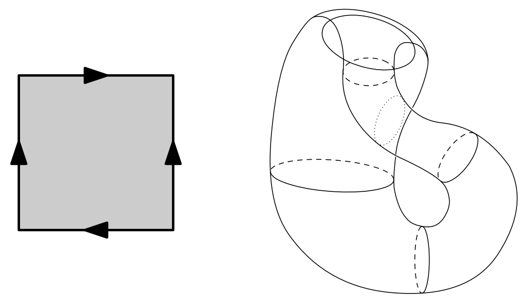


FIGURA 4. Identificación e imagen de una Botella de Klein

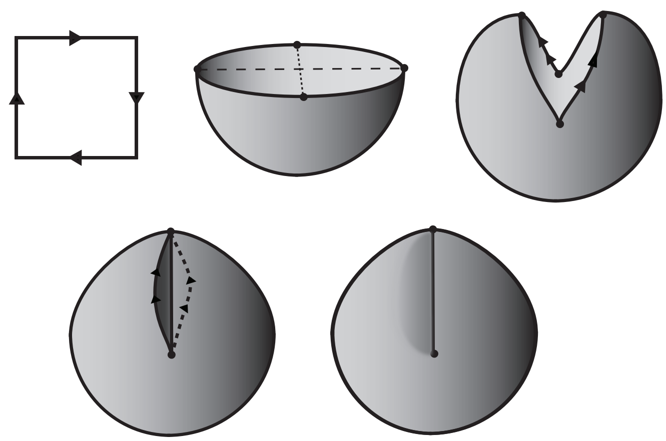


FIGURA 5. Identificación e imagen de un Plano proyectivo

Proposición 4.7.3. *Sean X un espacio topológico y Y un espacio cociente de X donde $q : X \to Y$ es la función cociente. Entonces, $F \subset Y$ es cerrado en Y si y sólo si $q^{-1}(F)$ es cerrado en X.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $F \subset Y$ un subconjunto. Entonces F es cerrado en Y si y sólo si $Y \setminus F$ es abierto en Y, lo cual sucede siempre y cuando $q^{-1}(Y \setminus F)$ sea abierto en X. Pero

$$q^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus q^{-1}(F).$$

Por lo que $q^{-1}(Y \setminus F)$ es abierto en X si y sólo si $q^{-1}(F)$ es cerrado en X, lo cual es justo lo que se quería demostrar. $\square$

Proposición 4.7.4. *Sean X un espacio topológico, Y un espacio cociente de X y $q : X \to Y$ la función cociente. Consideremos una función $f : Y \to Z$ donde Z es algún espacio topológico. Entonces f es continua si y sólo si la composición $f \circ q : X \to Z$ es continua.*

Demostración. Claramente si f es continua, entonces la composición $f \circ q$ es una función continua. Ahora supngamos que $f \circ q$ es continua. Entonces, para cualquier abierto U en Z, $(f \circ q)^{-1}(U) = q^{-1}(f^{-1}(U))$ es abierto en X. Pero como Y es un espacio cociente y q es la función cociente, se sigue que $f^{-1}(U)$ es abierto en Y, lo cual demuestra que f es continua. □

4.8. Ejercicios del capítulo.

1. Sea X un espacio topológico y $A \subset X$. Definimos $\chi_A : X \to [0,1]$ como
$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$
Demostrar que χ_A es continua si y sólo si A es abierto y cerrado.
2. Sea $X = (0, \infty)$ con la topología inducida de $\mathbb{R}$ y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión dada por $a_n = 1/n$. Encuentra un homeomorfismo $f : X \to X$ tal que $\{f(a_n)\}$ no sea sucesión de Cauchy. Concluye que ser sucesión de Cauchy no es una propiedad topológica. Recuerda que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ del espacio métrico (X, d) es de Cauchy, si para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ para todo $n, m > n_0$.
3. Da un ejemplo de un conjunto X, de una suceción $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X y de dos topologías τ y σ en X, tales que exista un punto x_0 in X de manera que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converja a x_0 en (X, τ) pero no converja a x_0 en (X, σ).
4. Demuestra el teorema 4.3.2.
5. Sea $\{\tau_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una colección de topologías en un conjunto X. Si $f : X \to Y$ es continua con respecto a cada τ_α, demuestra que f es continua respecto a la topología $\tau = \bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} \tau_\alpha$ en X.
6. Considera $X = [0, 1)$ y $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ dada por
$$\rho(x, y) = \text{mín}\{|x - y|,\ 1 - |x - y|\}.$$
En los ejercicios del capítulo 1 se pidió demostrar que ρ es una métrica en X. Si $\mathbb{S}^1$ es el círculo con la topología heredada del plano ¿son (X, ρ) y $\mathbb{S}^1$ homeomorfos?
7. Da un ejemplo de una función $f : X \to Y$ entre dos espacios topológicos, y de un conjunto $A \subset X$, tal que $f(\overline{A}) \not\subset \overline{f(A)}$.
8. Demuestra que el hecho de que cualquier función continua de un espacio X en $\mathbb{R}$ alcance su mínimo es una propiedad topológica. Concluye que $[0, 1]$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}$.
9. Sean X y Y dos espacios topológicos, con $X = E \cup F$. Consideremos $f : E \to Y$ y $g : F \to Y$ con $f = g$ en $E \cap F$. Si f y g son continuas, demuestra los siguientes incisos.

a) Ver que $h = f \cup g$ está bien definida, donde

$$(f \cup g)(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \in E \\ g(x) & si\ x \in F \end{cases}$$

b) Dar un ejemplo en que h puede no ser continua.
c) Si E y F son abiertos entonces h es continua.
d) Si E y F son cerrados entonces h es continua.

10. Demuestra que un espacio X es discreto si y sólo si para cualquier espacio Y, cualquier función $f : X \to Y$ es continua.
11. Si X es un espacio topológico separable y $f : X \to Y$ una función continua a un espacio Y. Demostrar que $f(X)$ es un subespacio separable de Y.
12. Sea $f : X \to Y$ una función entre dos espacios topológicos. Demuestra que f es cerrada si y sólo si para cada punto $y \in Y$, y para cada abierto $U \subset X$ que contenga a $f^{-1}(y)$, existe una vecindad $V \subset Y$ de y, tal que $f^{-1}(V) \subset U$. Sugerencia: usa el teorema 4.2.4
13. Demuestra que $X \times Y \cong Y \times Z$ no implica que $X \cong Z$.
14. Demuestra que la suma $+ : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, la multiplicación $\mu\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y la multiplicación escalar $\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son continuas.
15. Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una familia de espacios topológicos. Demuestra que cada X_α puede encajarse en $\prod\limits_{\alpha \in \mathcal{A}}$. ¿Es este encaje único?
16. Demuestra que si $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ es una familia de espacios topológicos discretos, entonces el producto $\prod\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$ es discreto si y sólo si $\mathcal{A}$ es un conjunto finito ó a lo más una cantidad finita de espacios X_α poseen más de un punto.
17. Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una familia de espacios topológicos y $\{Y_\alpha \subset X_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una colección de subespacios topológicos. Entonces la topología producto en $\prod\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} Y_\alpha$ coincide con la topología inducida de $\prod\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$.
18. Considera X un espacio topológico y $X^m = \prod\limits_{i=1}^{m} X_i$ donde cada $X_i \cong X$. La diagonal de X^m es el conjunto

$$\Delta = \{(x_1, \ldots, x_m) \in X^m |\ x_1 = x_2 = \cdots = x_m\}.$$

Demuestra que Δ es homeomorfo a X.

19. Sea X un espacio topológico discreto y $\sim$ una relación de equivalencia en X. Demuestra que el espacio $X/\sim$ es discreto.
20. Considera el círculo $\mathbb{S}^1$ y $\sim$ la relación de equivalencia dada por $x \sim y$ si y sólo si $x = y$ ó $x = -y$. Demuestra que $\mathbb{S}^1$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^1/_\sim$

21. Sea $X = \mathbb{S}^1 \times [0,1]$ y $\sim$ la relación de equivalencia dada por $(x,t) \sim (y,s)$ si y sólo si $(x,t) = (y,s)$ ó $t = s = 0$ ó $t = s = 1$. Demuestra que $X/_\sim$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^2$.
22. Demuestra que si Y es un espacio cociente de un espacio topológico X y Z es un espacio cociente de Y, entonces Z es un espacio cociente de X.

Capítulo 5

Axiomas de Separación

Hasta ahora, nos hemos restringido a hablar de las características generales de los espacios topológicos. Conocemos varios ejemplos de éstos y seguramente ya habremos notado algunas diferencias entre ellos. Sin embargo, la simple definición de un espacio topológico es demasiado general. Es por ello, que para obtener más resultados, necesitamos establecer algunas restricciones a los espacios topológicos.

En el capítulo 2, hablamos de los axiomas de numerabilidad, los cuales diferencían a los espacios según la cardinalidad de las bases. En el presente capítulo, hablaremos de los axiomas de separación, los cuales nos permiten saber cuándo es posible separar puntos y conjuntos cerrados en un espacio topológico.

5.1. Axiomas de separación

Definición 5.1.1. *Diremos que un espacio topológico X satisface el axioma de separación T_0, o más brevemente, que es T_0 (denotado por $X \in T_0$), si para cualquier par de puntos distintos $x, y \in X$, existe un abierto U en X, tal que $|U \cap \{x, y\}| = 1$.*

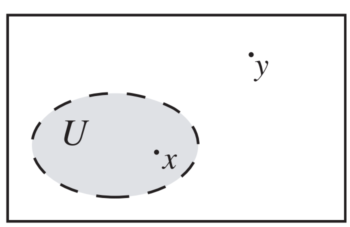


Figura 1. Espacio T_0

En otras palabras, un espacio es T_0 si para cualesquiera dos puntos distintos x y y, es posible hallar un abierto U que o bien contenga a x y no a y, o que contenga a y pero no a x.

Ejemplos 5.1.1.

1. Sea $X = \mathbb{R}$ con la topología indiscreta. Entonces X no es T_0, pues para cualesquiera dos puntos distintos, $x, y \in X$, el único abierto no vacío que los contiene es X, y $|X \cap \{x, y\}| = 2$.
2. Sea $X = \mathbb{R}$ y $\tau = \{U \subset \mathbb{R} \mid 1 \in U\}$. Entonces el espacio topológico (X, τ) es T_0. En efecto, si $x, y \in X$ son dos puntos distintos, entonces al menos uno de los dos puntos es diferente de 1. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $x \neq 1$ y consideremos $U = \{y, 1\}$. Claramente U es vecindad de y y $x \notin U$, por lo que X es T_0.

Definición 5.1.2. *Diremos que un espacio topológico X es T_1 (y lo denotaremos por $X \in T_1$), si para cualquier par de puntos distintos x, y, en X existen vecindades U y V de x y y, respectivamente, tales que $y \notin U$ y $x \notin V$.*

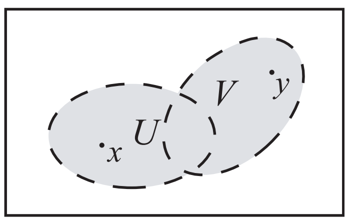


Figura 2. Espacio T_1

Ejemplo 5.1.2. Sea X un espacio topológico discreto. Entonces X es T_1.

Los espacios T_1 se caracterizan por el hecho de que cada uno de sus puntos constituye un subconjunto cerrado. La siguiente proposición nos lo demuestra.

Proposición 5.1.3. *Sea X un espacio topológico. Entonces $X \in T_1$ si y sólo si para todo punto x de X, el subconjunto unipuntual $\{x\}$ es cerrado en X.*

Demostración. Supongamos que $X \in T_1$. Sea x un punto arbitrario de X y $y \in X \setminus \{x\}$. Entonces, podemos encontrar una vecindad V de y tal que $x \notin V$. Así, tenemos que $y \in V \subset X \setminus \{x\}$, por lo que y es punto interior de $X \setminus \{x\}$, y por lo tanto, $X \setminus \{x\}$ es abierto en X. De este modo, podemos concluir que $\{x\}$ es un subconjunto cerrado en X.

Ahora supongamos que para cualquier punto $x \in X$, $\{x\}$ es cerrado en X. Sean $x, y \in X$ dos puntos arbitrarios y distintos. Como los subconjuntos $\{x\}$ y $\{y\}$ son cerrados, entonces $U = X \setminus \{y\}$ y $V = X \setminus \{x\}$ son vecindades de x y y, respectivamente. Claramente $y \notin U$ y $x \notin V$, por lo que $X \in T_1$, como se quería demostrar. $\square$

Proposición 5.1.4. *Sea X un espacio topológico. Si X es T_1 entonces X es T_0.*

DEMOSTRACIÓN. Sean x, y, dos puntos distintos de X. Como $X \in T_1$ existen dos vecindades U y V de x y y, respectivamente, tales que $x \notin V$ y $y \notin U$. Entonces $|U \cap \{x,y\}| = |V \cap \{x,y\}| = 1$, lo cual demuestra que X es T_0. $\square$

El recíproco de la proposición anterior no es cierto. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 5.1.3. Sea (X, τ) el espacio topológico del Ejemplo 5.1.1. Entonces, X es un espacio T_0 pero no es T_1. Para verlo, simplemente notemos que para cualquier punto x distinto de 1, y para cualquier vecindad U de x, $1 \in U$.

Definición 5.1.5. *Se dice que un espacio topológico X es T_2 (y se denota por $X \in T_2$), si para cualquier par de puntos x, y, distintos, existen dos vecindades U y V de x y de y, respectivamente, tales que $U \cap V = \emptyset$.*

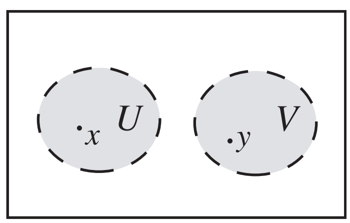


FIGURA 3. Espacio T_2

A los espacios T_2 también se les conoce como espacios de **Hausdorff**, en honor a Felix Hausdorff, quién los introdujo por pirmera vez.

Ejemplo 5.1.4. Si (X, d) es un espacio métrico, entonces X es T_2. En efecto, si x y y son dos puntos distintos, se tiene que $d(x,y) > 0$. Sea $\varepsilon = \frac{d(x,y)}{2}$, $U = B(x, \varepsilon)$ y $V = B(y, \varepsilon)$. Claramente $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Proposición 5.1.6. *Sea X un espacio topológico. Si X es de Hausdorff, entonces $X \in T_1$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean x y y dos puntos distintos de X. Como X es de Hausdorff, existen dos vecindades ajenas U y V, de x y y respectivamente, tales que $U \cap V = \emptyset$. Evidentemente, $x \notin V$ y $y \notin U$, lo cual demuestra que X es un espacio T_1. □

El recíproco de la proposición anterior no es cierto. Veamos un ejemplo que lo confirme.

Ejemplo 5.1.5. Sea X un conjunto infinito y τ la topología cofinita en X. Ya que todo conjunto finito, y en particular todo conjunto unipuntual es cerrado tenemos por la proposición 5.1.3 que $X \in T_1$.

Ahora, consideremos las vecindades ajenas $U = X \setminus A$ y $V = X \setminus B$ de x y de y, donde A y B denotan a dos subconjuntos finitos de X. Como X es infinito, U y V son conjuntos infinitos. Pero como $U \cap V = \emptyset$, tenemos que $V \subset A$ y $U \subset B$, lo cual nos dice que U y V son conjuntos finitos. Ésto es una contradicción que viene de suponer que U y V son ajenas. Por lo tanto X no es un espacio de Hausdorff.

Definición 5.1.7. *Sea X un espacio topológico. Se dice que X es T_3 (y se denota por $X \in T_3$) si para cualquier cerrado $F \subset X$ y cualquier punto $x \in X \setminus F$, existen dos abiertos ajenos U y V tales que $x \in U$ y $F \subset V$.*

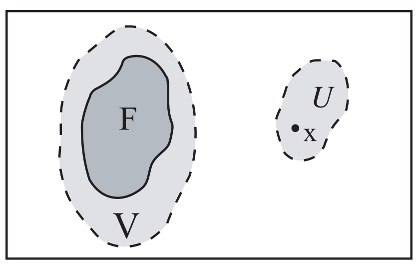


FIGURA 4. Espacio T_3

Notemos que en la definición anterior, no estamos pidiendo que los puntos sean cerrados. Por lo tanto, un espacio topológico puede ser T_3 sin ser T_2 o T_1.

Ejemplo 5.1.6. Sea $X = \{a, b, c\}$ y $\tau = \{X, \emptyset, \{a, b\}, \{c\}\}$. Entonces (X, τ) es un espacio topológico T_3 pero no es T_1.

La demostración queda como ejercicio al lector.

Definición 5.1.8. *Un espacio topológico X se llama **regular** si $X \in T_1 \cap T_3$.*

Es importante señalar que algunos autores usan el término T_3 para los espacios regulares.

Proposición 5.1.9. *Si X es un espacio T_3 y $Y \subset X$, entonces Y es un espacio T_3.*

Demostración. Sean $F \subset Y \subset X$ un subconjunto cerrado en Y, y $x \in Y \setminus F$. Entonces F es de la forma $F = F' \cap Y$, donde F' es un subconjunto cerrado de X. Evidentemente, $x \notin F'$, por lo que en X existen dos abiertos ajenos, U' y V' tales que $x \in U'$ y $F' \subset V'$. Definamos $U = U' \cap Y$ y $V = V' \cap Y$. Se cumple que $x \in U$, $F \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$. Por lo tanto Y es un espacio T_3. $\square$

Proposición 5.1.10. *Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una familia de espacios topológicos. Si para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, el espacio X_α es T_3, entonces $X = \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$ es T_3.*

Demostración. Sea $F \subset X$ un subconjunto cerrado y $x = (x_\alpha) \in X \setminus F$. Como $X \setminus F$ es una vecindad de x, existe un abierto básico en X, $W = \langle W_{\alpha_1}, \ldots, W_{\alpha_n} \rangle$, tal que $x \in W \subset X \setminus F$. Como X_α es T_3 para todo $\alpha \in \mathcal{A}$, en cada X_{α_i} (con $i = 1, \ldots, n$) existen dos abiertos ajenos U_{α_i} y V_{α_i}, tales que $x_{\alpha_i} \in U_{\alpha_i}$ y $X \setminus W_{\alpha_i} \subset V_{\alpha_i}$. Definamos $U = \langle U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n} \rangle$ y $V = \bigcup_{i=1}^{n} \langle V_{\alpha_i} \rangle$. Evidentemente $x \in U$ y $F \subset X \setminus W \subset V$. Además, $U \cap V = \emptyset$. Por lo tanto, podemos concluir que X es un espacio T_3 $\square$

Las propiedades T_0, T_1 y T_2 también son hereditarias y estables bajo productos. Las demostraciones de estos hechos son sencillas y muy parecidas entre sí, por lo que se dejarán como ejercicio para el lector.

Corolario 5.1.11. *El producto arbitrario de espacios topológicos regulares es un espacio regular.*

El siguiente teorema nos brinda una caracterización muy práctica de los espacios topológicos T_3.

Teorema 5.1.12. *Un espacio topológico X es T_3 si y sólo si para cada punto x en X y cada abierto W tal que $x \in W$, existe un abierto U tal que $x \in U \subset \overline{U} \subset W$.*

Demostración. Supongamos que X es T_3. Sea $x \in X$ y W una vecindad de x. Entonces $F = X \setminus W$ es un conjunto cerrado tal que $x \notin F$. Como X es T_3 , existen dos vecindades U y V, de x y F, respectivamente, tales que $V \cap U = \emptyset$. Entonces $U \subset X \setminus V$, y como $X \setminus V$ es cerrado en X, es claro que $\overline{U} \subset X \setminus V$. Además, $F = X \setminus W \subset V$, por lo que $X \setminus V \subset W$. Así, podemos conluir que $x \in U \subset \overline{U} \subset W$.

Ahora supongamos que para cualquier punto x y para cualquier vecindad W de x, existe una vecindad U de x tal que $x \in U \subset \overline{U} \subset W$. Sea F un cerrado en X y $x \in X \setminus F$. Como $W = X \setminus F$ es vecindad de x, podemos encontrar un abierto U tal que $x \in U \subset \overline{U} \subset W$. Sea $V = X \setminus \overline{U}$. Entonces U y V son dos abiertos ajenos tales que $x \in U$, $F \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$. Por lo tanto X es un espacio T_3. □

Ya vimos en el Ejemplo 5.1.6 que en general el axioma T_3 no implica el axioma T_2. Sin embargo, esta situación cambia cuando pedimos que el espacio sea regular.

Proposición 5.1.13. *Si X es un espacio topológico regular, entonces X es de Hausdorff.*

Demostración. Sean x y y dos puntos distintos de X. Como X es T_1, entonces $\{y\}$ es un conjunto cerrado de X. Además, comos X es T_3, existen dos abiertos disjuntos, U y V, tales que $x \in U$ y $y \in V$. Así, X es un espacio de Hausdorff.

□

Una vez más, el recírpoco de este teorema no es cierto. Veamos un ejemplo para cerciorarnos de ello.

Ejemplo 5.1.7. Sea $X = [0, 1]$. Denotemos por τ_e la topología euclideana en X. Sea $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ y denotemos por σ al siguiente conjunto:

$$\sigma = \{U \setminus B \mid U \in \tau_e,\ 0 \in U,\ B \subset A\}.$$

Entonces $\tau = \tau_e \cup \sigma$ es una topología en X que hace al espacio (X, τ) un espacio de Hausdorff, pero no un espacio regular, como verificaremos enseguida:

Dejamos como ejercicio al lector demostrar que τ es una topología en X.

Sean x y y dos puntos distintos en X. Por el Ejemplo 5.1.4 sabemos que (X, τ_e) es un espacio de Hausdorff, por lo que podemos encontrar dos conjuntos $U, V \in \tau_e \subset \tau$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Por lo tanto, (X, τ) es también un espacio de Hausdorff.

Ahora veamos que X no es un espacio regular. Notemos que A es cerrado en X, ya que $X \setminus A \in \sigma \subset \tau$. Por otro lado, el punto 0 no pertenece a A. Supongamos que existen dos abiertos U y V, tales que $0 \in U$, $A \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$. Como $0 \notin V$, inferimos que $V \in \tau_e$. Además, U no puede ser un abierto euclideano, pues de lo contrario, $U \cap A \neq \emptyset$, lo cual contradice el hecho de que U y V son ajenos. Entonces $U = U' \setminus B$, en donde $U' \in \tau_e$ y $B \subset A$. Ya que $0 \in U'$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $1/m \in U'$. Como $1/m \in A \subset V$, podemos encontrar $\varepsilon > 0$ tal que $(1/m - \varepsilon, 1/m + \varepsilon) \subset V \cap U'$. Notemos que $U \cap (1/m - \varepsilon, 1/m + \varepsilon) \neq \emptyset$, por lo que $V \cap U \neq \emptyset$, una contradicción.

Así podemos concluir que (X,τ) no es un espacio regular, lo que se quería demostrar.

Definición 5.1.14. *Sea X un espacio topológico. Se dice que X es $T_{3\frac{1}{2}}$ (y se denota por $X \in T_{3\frac{1}{2}}$), si para cualquier punto x y cualquier cerrado $A \subset X$, existe una función continua $f : X \to [0,1]$, tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$ para todo $y \in A$.*

*Diremos que el espacio topológico X es de **Tychonoff** o **completamente regular** si $X \in T_1$ y $X \in T_{3\frac{1}{2}}$.*

Al igual que en el caso de los espacios T_3, algunos autores añaden a la definición de $T_{3\frac{1}{2}}$, la condición de que el espacio sea T_1.

Proposición 5.1.15. *Si un espacio topológico X es $T_{3\frac{1}{2}}$, entonces X es T_3*

Demostración. Sea $A \subset X$ cerrado en X y $x \in X \setminus A$. Como X es $T_{3\frac{1}{2}}$, existe una función continua $f : X \to [0,1]$, tal que $f(x) = 0$ y $f(A) \subset \{1\}$. Tomemos $U = f^{-1}\big([0,\frac{1}{2})\big)$ y $V = f^{-1}\big((\frac{1}{2},1]\big)$. Como f es continua y $[0,\frac{1}{2})$ y $(\frac{1}{2},1]$ son abiertos en $[0,1]$, entonces U y V son dos abiertos ajenos en X. Además $x \in U$ y $A \subset V$, por lo que X es un espacio T_3. □

Corolario 5.1.16. *Si X es un espacio de Tychonoff, entonces X es un espacio regular.*

La recíproca de la proposición anterior tampoco se da, como evidencía el siguiente ejemplo, debido a A. Mysior.

Ejemplo 5.1.8. Sea $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\} \cup \{a\}$, es decir el semiplano superior cerrado junto con un punto adicional a. Construyamos la topología para X definiendo bases locales en cada punto.

Para los puntos (x,y), con $y > 0$, la base local $\beta_{(x,y)}$ constará únicamente del singulete $\{(x,y)\}$. Para cada $x \in \mathbb{R}$ fijo consideremos los conjuntos $I_x = \{(x,y) \mid 0 \le y \le 2\}$ e $I'_x = \{(x+y,y) \mid 0 \le y \le 2\}$, y así para cada punto de la forma $(x,0)$, definimos su base local como los conjuntos de la forma $(I_x \cup I'_x) \setminus F$, donde F es un conjunto finito. Por último, para a, definimos $\beta_a = \{a\} \cup \{(x,y) \mid x > n\}$.

Queda como ejercicio para el lector corroborar que esto efectivamente define una topología en X.

Es sencillo verificar que X es T_1. Las vecindades básicas de los puntos de $X \setminus \{a\}$ son simultáneamente abiertas y cerradas, y para a vemos que $\overline{U_{n+2}} \subset U_n$. Con esto, para cada punto en x, y cualquier vecindad suya V,

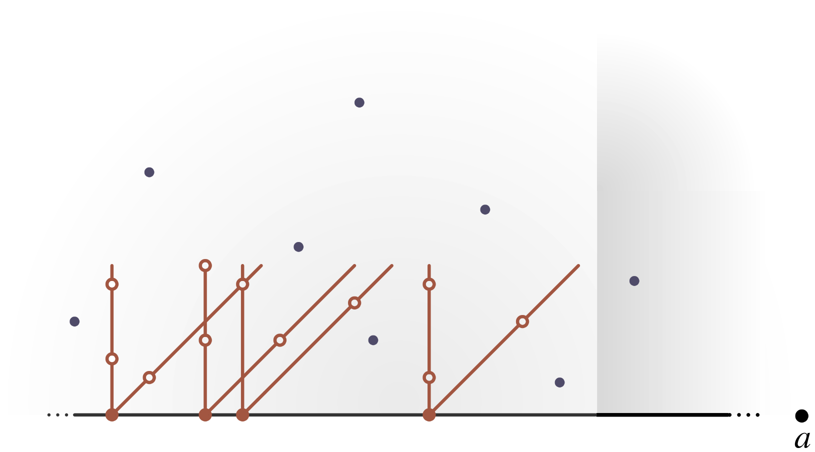


Figura 5. Ejemplo

hemos encontrado un abierto W tal que $x \in W \subset \overline{W} \subset V$, con lo que, aplicando el teorema **??**, queda probado que X es T_3.

Para probar que X no es $T_{3\frac{1}{2}}$, consideremos $A = \{(x,0) \mid x \leq 1\}$, que es un subconjunto cerrado de X. Veremos que para cualquier función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(A) = \{0\}$, necesariamente $f(a)$ será también cero. En efecto, ya que $f^{-1}(0)$ debe ser un subconjunto cerrado, es suficiente mostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $K_n = f^{-1}(0) \cap \{(x,0) \mid n-1 \leq x \leq n\}$ es distinto del vacío, pues con esto estaríamos demostrando que $a \in \overline{f^{-1}(0)}$.

Probaremos por inducción que cada K_n es de hecho infinito. Claramente K_1 lo es. Suponiendo que K_n es infinito, podemos hallar $C \subset K_n$ un subconjunto infinito numerable. Para cada $(c,0) \in C$, $f^{-1}([1/n,1]) \cap I'_c$ debe ser finito, pues $f^{-1}([0,1/n))$ es vecindad de c. Así, el conjunto $I'_c \setminus f^{-1}(0) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}([1/n,1]) \cap I'_c$ es a lo más numerable, por lo que la proyección $P = \Big\{(x,0) \mid (x,y) \in \bigcup_{(c,0)\in C} \{I'_c \setminus f^{-1}(0)\}\Big\}$ es también numerable.

Es claro entonces que $F = \{(x,0) \mid n \leq x \leq n+1\} \setminus P$ es infinito. Además, para cada $(x,0) \in F$ el segmento I_x interseca a $I'_c \cap f^{-1}(0)$ para cada $(c,0) \in C$, de modo que hay una infinidad de puntos en $I_x \cap f^{-1}(0)$, y por tanto no existe ninguna vecindad de $(x,0)$ que lo separe de $f^{-1}(0)$, y como $f^{-1}(0)$ es cerrado, se sigue que $(x,0) \in f^{-1}(0)$. En consecuencia $F \subset f^{-1}(0)$, por lo que esl conjunto K_{n+1} es infinito, lo que buscábamos demostrar.

La propiedad de ser un espacio $T_{3\frac{1}{2}}$ es una propiedad hereditaria.

Proposición 5.1.17. *Sea X un espacio topológico y $Y \subset X$ un subconjunto cualquiera. Si $X \in T_{3\frac{1}{2}}$, entonces $Y \in T_{3\frac{1}{2}}$.*

Demostración. Sean $A \subset Y$ cerrado en Y y $x \in Y \setminus A$. Entonces existe un subconjunto cerrado A' en X tal que $A = A' \cap Y$. Evidentemente $x \notin A'$. Además, como X es $T_{3\frac{1}{2}}$ existe una función continua $g : X \to [0,1]$ tal que $g(x) = 0$ y $g(A') = \{1\}$. Sea $f = g|_Y : Y \to [0,1]$ la restricción a Y de g. Entonces f es una función continua tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$ para todo $y \in A$. Por lo tanto, Y es un espacio $T_{3\frac{1}{2}}$. $\square$

Proposición 5.1.18. *Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una familia de espacios topológicos. Si para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, el espacio X_α es $T_{3\frac{1}{2}}$, entonces $X = \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$ es $T_{3\frac{1}{2}}$.*

Demostración. Sea A cerrado en X y $x = (x_\alpha) \in X \setminus A$. Como A es cerrado, $X \setminus A$ es una vecindad de x, por lo que podemos encontrar un abierto básico $W = \langle W_{\alpha_1}, \ldots, W_{\alpha_n}\rangle$ en X tal que $x \in W \subset X \setminus A$.

Como cada X_{α_i} es un espacio $T_{3\frac{1}{2}}$, existe una función continua $f_{\alpha_i} : X_{\alpha_i} \to [0,1]$ tal que $f_{\alpha_i}(x_{\alpha_i}) = 1$ y $f_{\alpha_i}(X_{\alpha_i} \setminus W_{\alpha_i}) = \{0\}$. Para cada α_i, consideremos la proyección $\pi_{\alpha_i} : X \to X_{\alpha_i}$ en la α_i-ésima coordenada, y llamemos $g_{\alpha_i} = f_{\alpha_i} \circ \pi_{\alpha_i}$. Evidentemente, g_{α_i} es una función continua. Ahora definamos $f : X \to [0,1]$ por

$$f = g_{\alpha_1} \cdot g_{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot g_{\alpha_n}.$$

Es decir, $f(z) = g_{\alpha_1}(z) \cdot g_{\alpha_2}(z) \cdot \ldots \cdot g_{\alpha_n}(z)$ para todo $z \in X$. Así,

$$f(x) = f_{\alpha_1}(x_{\alpha_1}) \cdot f_{\alpha_2}(x_{\alpha_2}) \cdot \ldots \cdot f_{\alpha_n}(x_{\alpha_n}) = 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = 1.$$

Por otro lado, si $y \in A$ entonces $y \notin W$, por lo que existe $i \in \{1, \ldots, n\}$, tal que $y_{\alpha_i} \notin W_{\alpha_i}$. Entonces $f_{\alpha_i}(y_{\alpha_i}) = 0$, de donde $f(y) = 0$. La prueba de que f es continua la dejamos como ejercicio al lector. $\square$

Definición 5.1.19. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Se dice que X es T_4 (y se denota por $X \in T_4$), si para cualesquiera subconjuntos cerrados ajenos F y G, existen dos abiertos ajenos U y V tales que $F \subset U$ y $G \subset V$. Se dice que el espacio X es **normal**, si $X \in T_1 \cap T_4$.*

A diferencia de los axiomas T_i con $i < 4$, la propiedad de ser T_4 no es hereditaria. Sin embargo, es débilmente hereditaria (la heredan los subconjuntos cerrados), como lo veremos en la siguiente proposición.

Proposición 5.1.20. *Sea X un espacio topológico T_4 y $Y \subset X$ un subconjunto cerrado. Entonces Y es T_4.*

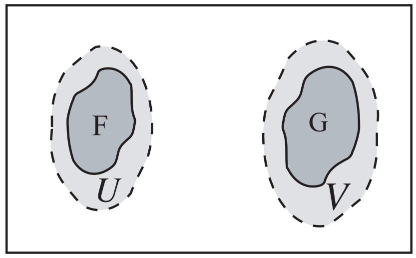


FIGURA 6. Espacio T_4

DEMOSTRACIÓN. Sean F y G cerrados en Y, entonces F y G son cerrados en X. Como X es T_4, existen dos abiertos ajenos U' y V' en X tales que $F \subset U'$ y $G \subset G'$. Claramente $U = U' \cap Y$ y $V = V' \cap Y$ son dos conjuntos ajenos, abiertos en Y tales que $F \subset U$ y $G \subset V$. Por lo tanto, Y es un subespacio T_4. □

El siguiente teorema nos presenta una forma práctica de caracterizar los espacios T_4.

Teorema 5.1.21. *Un espacio topológico X es T_4 si y sólo si para cada subconjunto cerrado $F \subset X$ y cada vecindad W de F, existe un abierto U en X tal que $F \subset U \subset \overline{U} \subset W$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que X es un espacio T_4. Sean $F \subset X$ un subconjunto cerrado en X y W una vecindad de F. Entonces $G = X \setminus W$ es cerrado en X y $G \cap F = \emptyset$. Como X es T_4, existen dos abiertos U y V tales que $F \subset U$, $G \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$. Así, $U \subset X \setminus V$, y como $X \setminus V$ es un subconjunto cerrado, esto implica que $\overline{U} \subset X \setminus V$. Por consiguiente $\overline{U} \subset X \setminus V \subset X \setminus G = W$. Claramente U es el abierto buscado. Por otro lado, si F y G dos subconjuntos ajenos y cerrados de X. Entonces, $W = X \setminus G$ es un abierto que contiene a F. Por la hipótesis, existe un abierto U tal que $F \subset U \subset \overline{U} \subset W$. Llamemos $V = X \setminus \overline{U}$. Entonces U y V son dos vecindades de F y G, respectivamente, tales que $U \cap V = \emptyset$. Por lo tanto, X es T_4. □

5.2. Lema de Urysohn

Teorema 5.2.1 (Lema de Urysohn)**.** *Sea X un espacio T_4. Supongamos que F y G son subconjuntos cerrados de X, tales que $F \cap G = \emptyset$. Entonces, existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(F) = \{0\}$ y $f(G) = \{1\}$.*

*La función f recibe el nombre de **función de Urysohn** del par (F,G).*

DEMOSTRACIÓN. Sea $P = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, donde $\mathbb{Q}$ denota el conjunto de los números racionales. Como P es un conjunto numerable, podemos numerar los elementos de P de manera que $P = \{r_n \mid n = 0, 1, 2 \dots\}$ en donde $r_0 = 0$

y $r_1 = 1$. Construiremos por inducción sobre n una sucesión de conjuntos abiertos U_{r_n} los cuales cumplirán las siguientes dos condiciones:

(1) $F \subset U_0$ y $U_1 \subset X \setminus G$,
(2) si $r < s$ entonces $\overline{U_r} \subset U_s$.

Como X es un espacio T_4, por el teorema 5.1.21 existe un abierto U tal que

$$F \subset U \subset \overline{U} \subset X \setminus G.$$

Definamos $U_0 = U$ y $U_1 = X \setminus G$. Claramente $\{U_0, U_1\}$ cumple las condiciones (1) y (2).

Supongamos que los abiertos $U_{r_0}, \ldots, U_{r_{n-1}}$ ya están construidos y satisfacen las condiciones (1) y (2). Para construir el abierto U_{r_n} denotemos:

$$r = \max\{r_k \mid k < n, r_k < r_n\}$$

y

$$s = \min\{r_k \mid k < n, r_k > r_n\}.$$

Por la hipótesis de inducción, $\overline{U_r} \subset U_s$. Aplicando nuevamente el hecho de que $X \in T_4$, podemos encontrar un abierto V tal que $\overline{U_r} \subset V \subset \overline{V} \subset U_s$. Definamos $U_{r_n} = V$. Evidentemente $\{U_{r_0}, U_{r_1}, \ldots, U_{r_n}\}$ satisface las condiciones (1) y (2). Así, podemos construir la sucesión $\{U_{r_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos abiertos que satisfacen las condiciones (1) y (2).

Ahora definamos la función $f : X \to [0,1]$ mediante la fórmula

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r \in P \mid x \in U_r\}, & \text{si } x \in X \setminus G, \\ f(x) = 1, & \text{si } x \in G. \end{cases}$$

Veamos que f es la función buscada. Si $x \in G$ entonces $f(x) = 1$. Por otro lado, si $x \in F$ entonces $x \in U_0$, de donde $f(x) = 0$.

Para terminar la demostración necesitamos verificar la continuidad de f. Para ello, basta ver que para cualquier $a \in (0,1)$, $f^{-1}([0,a))$ y $f^{-1}((a,1])$ son abiertos en X.

Notemos que $f(x) < a$ si y sólo si existe $q \in P$ tal que $x \in U_q$ y $q < a$. Entonces, es fácil ver que

$$f^{-1}\big([0,a)\big) = \bigcup_{q<a} U_q.$$

Así, $f^{-1}\big([0,a)\big)$ es abierto en X.

Análogamente, $f(x) > a$ si y sólo si existe $q \in P$ tal que $x \notin U_z$ y $q > a$. En virtud de la condición (2), $x \notin \overline{U_q}$ para todo $q \in P$ con $a < q < r$. Así, podemos decir que $f(x) > a$ si y sólo si existe $q \in P$, tal que $q > a$ y

$x \in X \setminus \overline{U_q}$. Por lo tanto

$$f^{-1}\big((a,1]\big) = \bigcup_{q>a} \Big(X \setminus \overline{U_q}\Big).$$

Así, $f^{-1}\big((a,1]\big)$ es abierto en X, lo cual demuestra la continuidad de f. $\square$

Corolario 5.2.2. *Si X es un espacio normal entonces X es de Tychonoff.*

Demostración. Sea A cerrado en X y $x \in X \setminus A$. Como X es T_1, $\{x\}$ es cerrado en X. Por otro lado, como X es normal, podemos aplicar el lema de Uryshon para encontrar una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(A) = 1$ y $f(x) = 0$. Así, podemos concluir que X es un espacio de Tychonoff. $\square$

A continuación veremos un ejemplo que nos mostrará que el recíproco del corolario 5.2.2 no es cierto.

Ejemplo 5.2.1. Sea (L,τ) el plano de Niemytzki (ejemplo 3.7.4). Entonces L es un espacio de Tychonoff pero no es normal.

Demostración. Recordemos que L_1 denota al conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$, $L_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ y $L = L_1 \cup L_2$. Sea τ_e la topología euclideana en L. Notemos que $\tau_e \subset \tau$. Sea $U \in \tau_e$ y $x \in U$. Si $x \in L_2$, entonces existe $r > 0$, tal que $B(x,r) \subset U$. Como $B(x,r) \in \tau$, x es punto interior de U respecto a τ. Ahora, si $x \in L_1$, entonces $x = (x_1, 0)$. Además, como U es un abierto euclideano, existe $r > 0$, tal que $B(x,r) \cap U \subset U$. Sea $z = (x_1, \frac{r}{2})$. Entonces,

$$B(z, r/2) \subset B(x,r) \cap U \subset U.$$

Más aún, $B(z,r/2)$ es tangente a L_1 en x. Por lo tanto, $W = B(z,r/2) \cup \{x\}$ es una vecindad de x respecto a τ contenida en U. Por lo tanto, x es punto interior de U, respecto a τ. Así hemos demostrado que $U \in \tau$, y por lo tanto, $\tau_e \subset \tau$.

Usemos éste hecho para demostrar que (L,τ) es un espacio completamente regular. Primero veamos que (L,τ) es T_1. Sea $x \in L$. Entonces, $L \setminus \{x\} \in \tau_e \subset \tau$. Por lo que el conjunto $\{x\}$ es cerrado en (L,τ), lo cual demuestra que (L,τ) es T_1.

Ahora consideremos un subconjunto A cerrado en (L,τ), y $x \in L \setminus A$. Si $x \in L_2$, podemos encontrar $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset L_2$ y $B(x,r) \cap A = \emptyset$. Entonces el conjunto $B = X \setminus B(x,r)$ es cerrado en (L,τ_e). Como (L,τ_e) es un espacio métrico, en particular es completamente regular, por lo que podemos encontrar una función continua $g : (L,\tau_e) \to [0,1]$, tal que $g(x) = 0$ Y $g(B) = \{1\}$.

Consideremos la función identidad, $Id : (L, \tau) \to (L, \tau_e)$. Como $\tau_e \subset \tau$, Id es una función continua. Consecuentemente, $f : (L, \tau) \to [0, 1]$ dada por

$$f = g \circ Id,$$

es una función continua. Además, $f(x) = 0$ y $f(A) = \{1\}$ ya que $A \subset B$.

Por otro lado, si $x \in L_1$, entonces existe un disco abierto D, de radio r y tangente a L_1 en x tal que $U = D \cup \{x\} \subset L \setminus A$. Denotemos a x por $x = (x_1, 0)$ y definamos $f : (L, \tau) \to [0, 1]$ de la siguiente forma:

$$f(z_1, z_2) = \begin{cases} 0, & \text{si } (z_1, z_2) = (x_1, 0), \\ 1, & \text{si } (z_1, z_2) \in L \setminus U, \\ \frac{(z_1 - x_1)^2 + z_2^2}{2rz_2}, & (z_1, z_2) \in D. \end{cases}$$

Para demostrar que f es continua, considermos a y b en $[0, 1]$. Basta demostrar que $f^{-1}([0, a))$ y $f^{-1}((b, 1])$ son abiertos en (L, τ). Pero esto se sigue de las siguientes igualdades, las cuales quedan como ejercicio al lector:

$$f^{-1}([0, a)) = \{x\} \cup B\big((x_1, ra), ra\big) \in \tau,$$

y

$$f^{-1}((b, 1]) = X \setminus \overline{B\big((x_1, rb), rb\big)}^{\tau_e} \in \tau_e \subset \tau.$$

Ahora veamos que L no es T_4. Sea $C = \{(x, y) \in L_2 \mid x \in \mathbb{Q},\ y \in \mathbb{Q}\}$. Es fácil ver que C es un conjunto numerable y denso en L. Además observemos que L_1 es un subespacio cerrado y discreto de L, por lo que cualquier subconjunto $A \subset L_1$ es cerrado en L.

Supongamos que L es T_4. Entonces, para cualquier $A \subset L_1$, tanto A como $L_1 \setminus A$ son subconjuntos cerrados de L, por lo que existen dos abiertos disjuntos U_A y V_A en L tales que $A \subset U_A$ y $L_1 \setminus A \subset V_A$. Definamos $C_A = C \cap U_A$. Como C es denso en L, C_A no es vacío para todo $A \subset L_1$.

Afirmamos que si A y B son dos subconjuntos distintos de L_1, entonces C_A y C_B son distintos. En efecto, si $A \neq B$ entonces $A \setminus B \neq \emptyset$ ó $B \setminus A \neq \emptyset$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $A \setminus B \neq \emptyset$. Observemos que $A \setminus B = A \cap (L_1 \setminus B)$, por lo que

$$A \setminus B = A \cap (L_1 \setminus B) \subset U_A \cap V_B.$$

Como $A \setminus B \neq \emptyset$, tenemos que $U_A \cap V_B \neq \emptyset$. Además, como C es denso en L, entonces

$$C \cap U_A \cap V_B = C_A \cap V_B \neq \emptyset.$$

Pero $U_B \cap V_B = \emptyset$, de donde podemos concluir que $C_A \cap V_B \subset C_A \setminus C_B$ y por tanto $C_A \setminus C_B \neq \emptyset$, como se quería demostrar.

Así, la función $\phi : 2^{L_1} \to 2^C$, dada por $\phi(A) = C_A$ es una función inyectiva. De esta manera, podemos conluir que la cardinalidad $|2^{L_1}| = |2^{\mathbb{R}}| \leq |2^C| = |2^{\mathbb{N}}|$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto L no es un espacio T_4.

□

En los espacios métricos, el lema de Urysohn se puede verificar de una manera más simple.

Proposición 5.2.3. *Sean (X, d) un espacio métrico, y F y G dos subconjuntos cerrados y ajenos de X. Entonces existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f^{-1}(0) = F$ y $f^{-1}(1) = G$.*

DEMOSTRACIÓN. Para cada subconjunto cerrado $A \subset X$, definamos la función $d_A : X \to \mathbb{R}$ por

$$d_A(x) = \inf_{z \in A} d(x, z).$$

Notemos que si x y y son dos puntos distintos, entonces

$$d_A(y) = \inf_{z \in A} d(y, z) \leq \inf_{z \in A} \{d(y, x)) + d(x, z)\} = \inf_{z \in A} d(x, z) + d(x, y) = d_A(x) + d(x, y).$$

Análogamente, se puede observar que $d_A(x) \leq d_A(y) + d(x, y)$. Por lo tanto, para cualquier x y y en X se tiene

$$|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x, y).$$

Entonces, dada $\varepsilon > 0$, si $d(x, y) < \varepsilon$, tenemos $|d_A(x) - d_A(y)| < \varepsilon$, lo cual demuestra que d_A es una función continua (de hecho uniformemente continua).

Sean F y G dos subconjuntos cerrados. Entonces la función $f : X \to [0,1]$ definida por

$$f(x) = \frac{d_F(x)}{d_F(x) + d_G(x)},$$

es una función bien definida ya que $F \cap G = \emptyset$ y por tanto $d_F(x) + d_G(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in X$. f es continua por ser composición de funciones continuas.Además, es fácil observar que

$$d_G(x) = 0 \Leftrightarrow x \in G \text{ y } d_F(x) = 0 \Leftrightarrow x \in F.$$

Por lo que $f(x) = 0$ si y sólo si $x \in F$ y $f(x) = 1$ si y sólo si $x \in G$. Entonces f es la función de Urysohn buscada. □

Corolario 5.2.4. *Todo espacio métrico es un espacio normal.*

5.2.1. Teorema del encaje de Tychonoff. El siguiente teorema nos brinda una caracterización de los espacios de Tychonoff.

Teorema 5.2.5 (Teorema del encaje de Tychonoff)**.** *Un espacio topológico X es de Tychonoff si y sólo si existe un cardinal ω y un encaje $h : X \hookrightarrow \mathrm{I}^\omega$, en donde I denota el intervalo $[0,1]$.*

Demostración. Como I es un espacio métrico, por el corolario **??** I es un espacio de Tychonoff. Luego por la proposición 5.1.18, el espacio I^ω es de Tychonoff. Como la propiedad de ser un espacio de Tychonoff es hereditaria, todo subespacio $Y \subset \mathrm{I}^\omega$ es de Tychonoff (ver proposición 5.1.17). Por lo tanto, si X es homeomorfo a un subespacio de I^ω, entonces X también es de Tychonoff.

Ahora supongamos que X es un espacio de Tychonoff. Sea

$$\mathcal{S} = \{s : X \to \mathrm{I} \mid s \text{ es continua}\}.$$

Llamemos $\omega = |\mathcal{A}|$ y definamos $h : X \to \mathrm{I}^\omega = \prod_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{I}_s$ (en donde $\mathrm{I}_s = \mathrm{I}$) como el producto diagonal $h = \mathop{\triangle}_{s\in\mathcal{S}} s$. Es decir, si $x \in X$, entonces $h(x)_s = \pi_s(h(x)) = s(x)$. Como cada $s : X \to \mathrm{I} = \mathrm{I}_s$ es una función continua, la función h también es continua.

Por otro lado, si x y y son dos puntos distintos de X, como $\{y\}$ es cerrado en X y éste es un espacio de Tychonoff, existe una función continua $s_0 \in \mathcal{S}$, tal que $s_0(x) = 0$ y $s_0(y) = 1$. Entonces $h(x)_{s_0} \neq h(y)_{s_0}$, por lo que $h(x) \neq h(y)$. De esta manera, queda demostrado que h es una función inyectiva.

Demostremos que la familia $\int$ separa puntos de conjuntos cerrados. Sea $B \subset X$ un subconjunto cerrado y $x \in X \setminus B$. Entonces existe una función continua $t \in \mathcal{S}$, tal que $t(B) = \{0\}$ y $t(x) = 1$. Evidentemente, $\overline{t(B)} = \{0\}$, por lo que $t(x) \notin \overline{t(B)}$. Consecuentemente $\mathcal{S}$ separa puntos de subconjuntos cerrados. Entonces, por el teorema de la Diagonal (teorema 4.6.4), h es un encaje topológico. $\square$

Más adelante veremos algunas aplicaciones del teorema anterior. Por el momento continuaremos viendo algunos teoremas clásicos relacionados con los axiomas de separación.

Lema 5.2.6. *Sea X un espacio topológico T_1. Supongamos que para cada cerrado $F \subset X$ y para cada vecindad W de F, existe una colección numerable de subconjuntos abiertos, $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $F \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n$. Además, supongamos que $\overline{W_n} \subset W$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces, X es normal.*

Demostración. Sean F y G dos subconjuntos cerrados y disjuntos de X. Entonces $X \setminus G$ es una vecindad abierta de F. Por hipótesis existe una colección $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos abiertos, tales que $F \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ y $\overline{U_n} \subset X \setminus G$.

Análogamente, podemos encontrar una colección de subconjuntos abiertos $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tales que $G \subset \bigcup V_n$ y $\overline{V_n} \subset X \setminus F$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos los siguientes conjuntos:

$$W_n = U_n \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_i}),$$

$$O_n = V_n \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_i}).$$

Es fácil ver que W_n y O_n son subconjuntos abiertos. Además, como

$$\overline{U_n} \subset X \setminus G \;\text{ y }\; \overline{V_n} \subset X \setminus F,$$

tenemos que $\overline{U_n} \cap G = \emptyset$ y $\overline{V_n} \cap F = \emptyset$. Así, podemos asegurar que

$$F \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n = U \;\text{ y }\; G \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n = V.$$

Para completar la prueba necesitamos demostrar que $U \cap V = \emptyset$. Supongamos lo contrario, es decir, que existe $x \in U \cap V$. Entonces existen dos números naturales, n y m, tales que $x \in W_n \cap O_m$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $n \geq m$. Entonces $V_m \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_i$, y por la definición de W_n, $V_m \subset X \setminus W_n$. Además $O_m \subset V_m$, por lo que $O_m \subset X \setminus W_n$. Entonces, tenemos que $O_m \cap W_n = \emptyset$, pero esto es una contradicción por que $x \in O_m \cap W_n$. Por lo tanto $U \cap V = \emptyset$, como se quería demostrar. □

Teorema 5.2.7. *Sea X es un espacio topológico regular. Si X es segundo numerable, entonces es normal.*

Demostración. Sean F un subconjunto cerrado y W una vecindad abierta de X. Como X es segundo numerable, existe una base numerable $\mathcal{B}$ para X. Por la regularidad de X, para cada $x \in F$, podemos encontrar un abierto V tal que $x \in V \subset \overline{V} \subset W$. Como $\mathcal{B}$ es base, existe un elemento $U_x \in \mathcal{B}$, tal que $x \in U_x \subset V$. Evidentemente $\overline{U_x} \subset W$. Sea $\mathcal{U} = \{U_x\}_{x\in F}$, como $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}, \mathcal{U}$ es a lo más numerable. Así, estamos en condiciones de aplicar el lemma 5.2.6, el cual nos garantiza que X es normal.

□

Teorema 5.2.8 (De metrizabilidad de Uryshon)**.** *Sea X un espacio regular con base numerable. Entonces, X es metrizable.*

Demostración. Afirmamos que existe una colección numerable de funciones continuas $\mathcal{F} = \{f_n : X \to [0,1]\}_{n\in\mathbb{N}}$ con la propiedad de que para cualquier $x \in X$ y para cualquier vecindad U de x, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f_n(x) > 0$ y $f_n(X \setminus U) = 0$.

Para construir $\mathcal{F}$ primero notemos que como X es regular y segundo numerable, en virtud del teorema 5.2.7, X es normal. consideremos una base numerable $\mathcal{B} = \{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para la topología de X. Para cada par de números naturales, $n, m \in \mathbb{N}$, tales que $\overline{V_n} \subset V_m$, aplicando el Lema de Urysohn, podemos encontrar una función $g_{nm} : X \to [0,1]$ tal que $g_{nm}(\overline{V_n}) = 1$ y $g_{nm}(X \setminus V_m) = 0$.

Ahora sea $x \in X$ y U una vecindad arbitraria de x. Como $\mathcal{B}$ es base, existe $V_m \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V_m \subset U$. Pero como X es regular, existe un abierto V tal que $x \in V \subset \overline{V} \subset V_m \subset U$. Entonces existe $V_n \in \mathcal{B}$ con la propiedad de que $x \in V_n \subset V$, de donde podemos concluir que

$$x \in V_n \subset \overline{V_n} \subset V_m \subset U.$$

Consideremos la función g_{nm}. Entonces $g_{nm}(x) = 1$ y $g_{nm}(X \setminus U) = 0$. Así, $\{g_{nm}\}$ es la colección de funciones buscada. Como dicha colección es numerable, podemos renumerar cada uno de sus elementos para obtener una colección de la forma $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Observemos que $\mathcal{F}$ separa puntos de cerrados. En efecto, si $B \subset X$ es un subconjunto cerrado y $x \in X \setminus B$, entonces $U = X \setminus B$ es una vecindad para el punto x. Así, existe $f_n \in \mathcal{F}$ tal que $f_n(x) > 0$ y $f_n(B) = \overline{f_n(B)} = 0$, por lo que $f(x) \notin \overline{f(B)}$. Aplicando el teorema 4.6.4, podemos concluir que la función producto diagonal

$$f = \mathop{\triangle}_{n \in \mathbb{N}} f_n \to \mathrm{I}^{\aleph_0}$$

es un encaje topológico, y por tanto X es homeomorfo a un subespacio Y del cubo de Hilbert $\mathrm{I}^{\aleph_0}$. Como $\mathrm{I}^{\aleph_0}$ es un espacio metrizable, Y también lo es y por lo tanto X es metrizable, como se quería demostrar. $\square$

5.3. Teorema de Tietze-Urysohn

Uno de los problemás de gran interés en la topología es el siguiente: si $A \subset X$ ¿cúando una función continua $f : A \to Y$ puede ser extendida a una función continua $F : X \to Y$? En la actualidad se conocen muchos resultados al respecto; en esta sección estudiaremos uno de ellos: el Teorema de Tietze -Urysohn.

Diremos que un espacio topológico Y es **extensor absoluto respecto a** X (denotado $Y \in \mathrm{AE}(X)$ si para cualquier subconjunto cerrado $A \subset X$ y para cualquier función continua $f : A \to Y$, existe una función continua $F : X \to Y$ tal que $f(a) = F(a)$ para todo $a \in A$. En este caso F se llama extensión de f.

Si $\mathcal{C}$ es una clase de espacios topológicos (por ejemplo, la clase de los espacios normales), se dice que Y es un **extensor absoluto para la clase** $\mathcal{C}$ (denotado por $Y \in \mathrm{AE}(\mathcal{C})$) si $Y \in \mathrm{AE}(X)$ para cualquier $X \in \mathcal{C}$.

Teorema 5.3.1 (Tietze-Urysohn)**.** *Sea X un espacio topológico. Entonces $[-1,1]$ es un extensor absoluto respecto a X si y sólo si X es normal.*

Antes de continuar, demostremos el siguiente lema.

Lema 5.3.2. *Sean X un espacio normal, A un subconjunto cerrado, $r > 0$ y $f : A \to [-r, r]$. Entonces existe una función continua $g : X \to [-r, r]$ tal que :*

$$|g(x)| \leq \frac{1}{3}r$$

para toda $x \in X$, y

$$|f(a) - g(a)| \leq \frac{2}{3}r$$

para toda $a \in A$.

Demostración. Sean $C = f^{-1}([-r, -\frac{r}{3}])$ y $D = f^{-1}([\frac{r}{3}, r])$. Como f es continua, C y D son dos subconjuntos cerrados y disjuntos del espacio normal X. Aplicando el lema de Urysohn, podemos encontrar una función continua $g : X \to [-\frac{r}{3}, \frac{r}{3}]$, tal que $g(C) = -\frac{r}{3}$ y $g(D) = \frac{r}{3}$. Demostremos que g es la función buscada.

Es claro que g satisface que $|g(x)| \leq \frac{r}{3}$ para todo $x \in X$. Veamos que g también satisface la segunda ecuación. Si $a \in A$ y $f(a) \in [-\frac{r}{3}, \frac{r}{3}]$, entonces

$$|f(a) - g(a)| \leq \frac{r}{3} - \left(\frac{-r}{3}\right) = \frac{2}{3}r.$$

Por otro lado, si $f(a) \in [-r, -\frac{r}{3}]$, entonces $g(a) = -\frac{r}{3}$, de donde se sigue inmediatamente que $|f(a) - g(a)| \leq \frac{2}{3}r$. Análogamente, si $f(a) \in [\frac{r}{3}, r]$, entonces $g(a) = \frac{r}{3}$, por lo que es fácil concluir que $|f(a) - g(a)| \leq \frac{2}{3}r$, como se quería demostrar. $\square$

Demostración del teorema 5.3.1. Supongamos que $[-1, 1]$ es extensor absoluto para X. Sean A y B dos subconjuntos cerrados y disjuntos de X. Entonces $C = A \cup B$ es cerrado en X. Definamos $f : C \to [-1, 1]$ por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in A, \\ 1 & \text{si } x \in B. \end{cases}$$

Es claro que f es una función continua. Como $[-1, 1] \in \mathrm{AE}(X)$, existe una extensión continua $F : X \to [-1, 1]$ para f. Entonces $U = F^{-1}([-1, 0))$ y $V = F^{-1}((0, 1])$ son dos vecindades ajenas de A y de B, respectivamente, por lo que X es normal.

Ahora supongamos que X es normal. Consideremos un subconjunto cerrado A y una función continua $f : A \to [-1, 1]$. Construiremos por inducción sobre n, una sucesión de funciones $\{g_n : X \to [-1, 1]\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

(1) $| g_n(x) | \leq \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n-1}$ para toda $x \in X$,
(2) $| f(a) - \sum_{i=1}^{n} g_i(a) | \leq (\frac{2}{3})^n$ para toda $a \in A$.

Para $n = 1$, aplicando el lema 5.3.2, podemos encontrar una función continua $g_1 : X \to [-1, 1]$ que satisface las condiciones (1) y (2).

Supongamos que para cualquier $k \leq n$, existe una función $g_k : X \to [-1, 1]$ tal que las funciones $g_1, \ldots, g_n$ satisfacen las condiciones (1) y (2).

Sea $f_{n+1} = f - \sum_{i=1}^{n} g_i : A \to [-(\frac{2}{3})^n, (\frac{2}{3})^n]$.

Aplicando nuevamente el lema 5.3.2 podemos encontrar una función continua $g_{n+1} : X \to [(-\frac{2}{3})^n, (\frac{2}{3})^n]$ tal que

$$| g_{n+1}(x) | \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

para toda $x \in X$, y

$$| f_{n+1}(a) - g_{n+1}(a)) | \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

para toda $a \in A$.

Consecuentemente, las funciones $g_1, \ldots, g_n, g_{n+1}$ satisfacen las condiciones (1) y (2). Así, podemos construir la sucesión de funciones $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que se quería.

Ahora definamos $F : X \to [-1, 1]$ por

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x),\ x \in X.$$

Como $g_n(x) \leq \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n-1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$, podemos aplicar el criterio de Weierstrass, para concluir que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ converge uniformemente, y como consecuencia, F es una función continua. Por otro lado, $F(x) \in [-1, 1]$, ya que

$$| F(x) | \leq \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{\infty}(\frac{2}{3}) = 1.$$

Además, si $a \in A$, entonces

$$0 <| f(a) - \sum_{i=1}^{n} g_i(a) | \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Haciendo tender n a infinito, obtendremos que

$$0 < \ \Big| \ f(a) - F(a) \ \Big| \ \leq 0,$$

de donde $f(a) = F(a)$. Por lo tanto, F es la extensión continua de f. □

Corolario 5.3.3. $\mathbb{R}$ *es un extensor absoluto para los espacios normales.*

DEMOSTRACIÓN. Como $\mathbb{R}$ es homeomorfo a $(-1,1)$, basta demostrar el corolario para este espacio. Sean A un subconjunto cerrado de X y $f : A \to (-1,1) \subset [-1,1]$ una función continua. Por el teorema 5.3.1, existe una función continua $F : X \to [-1,1]$, tal que F extiende a f.

Consideremos el subconjunto cerrado $B = F^{-1}(\{-1\}) \cup F^{-1}(\{1\})$ de X. Como A es cerrado y $A \cap B = \emptyset$, por el lema de Urysohn existe una función continua $\lambda : X \to [0,1]$ tal que $\lambda(A) = \{1\}$ y $\lambda(B) = \{0\}$. Definamos $G : X \to (-1,1)$ por

$$G(x) = \lambda(x)F(x).$$

Veamos que G es la extensión buscada. Primero notemos que efectivamente $G(x) \in (-1,1)$. Si $a \in A$, entonces $G(a) = \lambda(a)F(a) = f(a) \in (-1,1)$. Si $x \in B$, entonces $G(x) = \lambda(x)F(x) = 0$. Finalmente, si $x \notin B$ tenemos $|F(x)| < 1$, y por tanto $|G(x)| = |\lambda(x)F(x)| < 1$. Por otro lado, como G es producto de dos funciones continuas, entonces G es continua. Así podemos concluir que G extiende continuamente a f, y por tanto, $(-1,1)$ es extensor absoluto para la clase de los espacios normales. $\square$

Corolario 5.3.4. *Todo intervalo semiabierto* $[a,b)$ *es extensor absoluto para los espacios normales.*

5.4. Ejercicios del capítulo

1. Sean X un conjunto y $a \in X$ un punto fijo. Si $\tau = \{U \subset X \mid a \in U\}$, demuestra que (X,τ) es un espacio T_0 pero no T_1.
2. Sea X un conjunto infinto y τ la topología cofinita. Mostrar que (X,τ) es un espacio T_1 pero no es T_i para ninguna $i > 1$.
3. Demuestra que un espacio topológico X es T_0 si y sólo si $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$ para cualquier par de puntos distintos $x, y \in X$.
4. Sea X un espacio topológico finito. Si X es T_1, demuestra que X es discreto.
5. Sean X un espacio topológico de Hausdorff y $\{x_1, x_2 \ldots, x_n\}$ una colección finita de puntos distintos. Demuestra que existe una familia $\{U_i\}_{i=1}^n$ de subconjuntos abiertos ajenos dos a dos, tales que $x_i \in U_i$ para toda $i \in \{1, \ldots n\}$.
6. Sean X un espacio topológico normal y $\{A_i\}_{n\in\{1,\ldots n\}}$ una familia finita de subconjuntos cerrados ajenos dos a dos. Demuestra que existe una familia $\{U_i\}_{i=1}^n$ de subconjuntos abiertos ajenos dos a dos, tales que $F_i \subset U_i$ para toda $i \in \{1, \ldots n\}$.
7. Sea X un espacio topológico. Demuestra que los siguiente enunciados son equivalentes.
   a) X es T_1.
   b) Todo subconjunto $A \subset X$ es intersección de una familia de subconjuntos abiertos de X.

8. Dar un ejemplo de un espacio topológico $X \in T_1$ tal que $U \cap V \neq \emptyset$ para cualesquiera abiertos no vacíos U y V.
9. Sea Y un espacio topológico. Si X es un espacio regular y $f : X \to Y$ es una función continua, suprayectiva, abierta y cerrada, entonces Y es de Hausdorff.
10. Verifica la continuidad de la función f construida en la prueba de la proposición 5.1.18
11. Demuestra que la recta de Sorgenfrey es un espacio normal.
12. Da un ejemplo de dos espacios topológicos normales, X y Y, tales que $X \times Y$ no sea un espacio normal. Sugerencia: considera $X = Y = L$, donde L denota la recta de Sorgenfrey.
13. Sea $X \subset \mathbb{R}^2$ la unión de las rectas $y = 0$ y $y = 1$ de $\mathbb{R}^2$ con la topología del subespacio. Sea Y el espacio cociente obtenido al identificar el punto $(x, 0)$ con su respectivo $(x, 1)$ para toda $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Demuestra que Y no es de Hausdorff y conluye que la imagen continua de un espacio de Hausdorff no necesariamente es de Hausdorff.
14. Sean X y Y dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua. Si Y es de Hausdorff, demuestra que el conjunto
$$A = \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid f(x_1) = f(x_2)\}$$
es cerrado en $X \times X$.
15. Sean $f, g : X \to Y$ dos funciones continuas. Si Y es de Hausdorff, demuestra que el conjunto $A = \{x \mid f(x) = g(x)\}$ es cerrado en X.
16. Sea X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua e idempotente, esto es $f(f(x)) = f(x)$ para todo $x \in X$. Demuestra que si X es un espacio de Hausdorff, entonces $f(X)$ es un subconjunto cerrado.
17. Sean X un espacio T_4, y U_1 y U_2 dos subconjuntos abiertos tales que $X = U_1 \cup U_2$. Demuestra que existen dos subconjuntos cerrados, A_1 y A_2, tales que $A_1 \subset U_1$, $A_2 \subset U_2$ y $A_1 \cup A_2 = X$.
18. Considera un espacio topológico arbitrario X. Diremos que $x \sim y$ si $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$. Demuestra que el espacio cociente $X/_\sim$ es un espacio T_0.

Capítulo 6

Espacios Compactos

En este capítulo hablaremos del concepto de compacidad. Los espacios a los que llamaremos compactos gozan de una gran cantidad de propiedades interesantes y por ello juegan un papel muy importante dentro de la topología.

6.1. Espacios Compactos

Antes de enunciar la definición de un espacio compacto, necesitamos introducir algunos nuevos conceptos.

Definición 6.1.1. *Sean X un espacio topológico, $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una familia de subconjuntos de X. Se dice que $\mathcal{U}$ es* ***cubierta*** *de X si $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha = X$. Si además cada elemento $U_\alpha \in \mathcal{U}$ es un subconjunto abierto, diremos que $\mathcal{U}$ es una* ***cubierta abierta****.*

Por otro lado, si $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta\in\mathcal{B}}$ es otra cubierta de X, diremos que $\mathcal{V}$ es ***subcubierta*** *de $\mathcal{U}$, si $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$.*

Ejemplo 6.1.1. La colección $\mathcal{U} = \{[n, n+1]\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una cubierta para la recta real; sin embargo, no es una cubierta abierta. Por otro lado $\mathcal{V} = \{(n-1, n+1)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sí es una cubierta abierta para $\mathbb{R}$.

Definición 6.1.2. *Un espacio topológico X se llama* ***compacto****, si toda cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X posee una subcubierta finita.*

Veamos algunos ejemplos que ilustren la definición anterior.

Ejemplo 6.1.2. Cualquier espacio topológico finito X es compacto. En efecto, cualquier cubierta de X es finita, particularmente, toda cubierta abierta de X es finita y por lo tanto X es compacto.

Ejemplo 6.1.3. Sea $Z = \{0\} \cup \{1/n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Entonces Z es compacto. En efecto, si $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ es una cubierta abierta de Z, existe $\beta \in \mathcal{A}$, tal que $0 \in U_\beta$. Entonces, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} \in U_\beta$ para todo $n > m$. Así, sólo un número finito de elementos de Z no están en U_β. Por lo tanto, podemos escojer un número finito de elementos de $\mathcal{U}$, digamos $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_k}$ de tal manera que cubran a $Z \setminus U_\beta$. Así, $\{U_\beta\} \cup \{U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_k}\}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{U}$. Por lo tanto, Z es compacto.

Ejemplo 6.1.4. La recta real no es un espacio compacto. Por ejemplo, $\{(n-1, n+1)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una cubierta abierta de $\mathbb{R}$ la cual no posee subcubierta finita.

En los capítulos anteriores notamos que algunos conjuntos pueden poseer ciertas propiedades que les brinda la topología del subespacio, que dejan de manifestarse cuando se trabaja con la topología del espacio ambiente. Por ejemplo, un conjunto A puede ser abierto en un subespacio Y de un espacio topológico X sin ser abierto en X.

Una propiedad interesantes de la compacidad es que es independiente del espacio ambiente, como veremos a continuación.

Proposición 6.1.3. *Sean X un espacio topológico y Y un subespacio de X. Entonces Y es compacto si y sólo si para toda colección $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ de elementos abiertos de X tal que $Y \subset \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha$, existe una subcolección finita $\{U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}\}$ tal que $Y \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$.*

Demostración. Supongamos que Y es un espacio compacto. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ como en las hipótesis de la proposición. Entonces, para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, el conjunto $U'_\alpha = U_\alpha \cap Y$ es abierto en Y, por lo que $\mathcal{U}' = \{U'_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ es una cubierta abierta de Y. Como Y es compacto, existe una subcubierta finita $\{U'_{\alpha_1}, \ldots U'_{\alpha_n}\}$ de $\mathcal{U}'$, y por lo tanto, el conjunto $\{U_{\alpha_1}, \ldots U_{\alpha_n}\}$ es una subcolección finita de $\mathcal{U}$ tal que $Y \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$.

Por otro lado, consideremos $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una cubierta abierta de Y. Para cada U_α existe un abierto U'_α en X tal que $U_\alpha = U'_\alpha \cap Y$. Por hipótesis, la colección $\{U'_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ posee una subcolección finita, $\{U'_{\alpha_1}, \ldots U'_{\alpha_n}\}$ tal que $Y \subset \bigcup_{i=1}^{n} U'_{\alpha_i}$. Entonces los correspondientes $\{U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}\}$ constituyen una subcubierta finita de $\mathcal{U}$, por lo que Y es compacto. $\square$

Teorema 6.1.4. *Sean X un espacio compacto y A un subconjunto cerrado de X. Entonces A es compacto.*

DEMOSTRACIÓN. En virtud de la proposición 6.1.3, basta demostrar que cualquier cubierta de $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ A con abiertos de X posee una subcubierta finita. Entonces $\mathcal{V} = \mathcal{U} \cup \{X \setminus A\}$ es una cubierta abierta de X. Como X es compacto, entonces existe una subcubierta finita de X, digamos $\{U_{\alpha_1}, \dots U_{\alpha_n}\} \cup \{X \setminus A\}$. Notemos que $(X \setminus A) \cap A = \emptyset$, por lo que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$. Así, $\{U_{\alpha_1}, \dots U_{\alpha_n}\}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{U}$. Por lo tanto A es compacto. □

El recíproco del teorema 6.1.4 no es cierto. Por ejemplo, en un espacio topológico finito que no es T_1, cualquier subconjunto es compacto, sin ser necesariamente cerrado. Sin embargo, esta situación cambia cuando pedimos que el espacio sea de Hausdorff.

Proposición 6.1.5. *Sea X un espacio topológico de Hausdorff, y $A \subset X$ un subespacio compacto. Si $b \in X \setminus A$, entonces existen dos abiertos disjuntos, U y V, tales que $A \subset U$ y $b \in V$.*

DEMOSTRACIÓN. Como $X \in T_2$, para cada $a \in A$, existen dos vecindades, U_a y V_a, de a y b, respectivamente, tales que $U_a \cap V_a = \emptyset$. Entonces $\{U_a\}_{a \in A}$ es una cubierta para A. Pero A es compacto, entonces podemos encontrar una subcubierta finita $\{U_{a_1}, \dots U_{a_n}\}$. Sean

$$U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i}$$

y

$$V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{a_i}.$$

Entonces U y V son dos abiertos en X. Además, $A \subset U$ y $b \in V$. Notemos que $U_{a_i} \cap V_{a_i} = \emptyset$ para toda $i \in \{1, ...n\}$. Así, $U_{a_i} \cap V = \emptyset$, para toda $i \in \{1, ...n\}$, por lo que $U \cap V = \emptyset$. Entonces, U y V son las dos vecindades que buscábamos. □

De la proposición anterior se siguen los siguientes resultados importantes:

Teorema 6.1.6. *Sea X un espacio de Hausdorff. Si $A \subset X$ es compacto, entonces A es cerrado en X.*

DEMOSTRACIÓN. Sean A un subespacio compacto de X y $x \in X \setminus A$. Por la proposición 6.1.5 podemos hallar abiertos ajenos W, U tales que $x \in W$ y $A \subset U$. Entonces $W \subset X \setminus A$, y por tanto x es punto interior de $X \setminus A$. Así podemos concluir que $X \setminus A$ es abierto y consecuentemente A es un subconjunto cerrado de X. □

Proposición 6.1.7. *Sea X un espacio compacto de Hausdorff. Entonces X es regular.*

Demostración. Como X es de Hausdorff, X es T_1. Verifiquemos simplemente que X sea T_3. Sean A un subconjunto cerrado de X y $x \in X \setminus A$ un punto arbitrario. Como A es cerrado en el compacto X, en virtud del teorema 6.1.4, A es compacto. La proposición 6.1.5 nos permite hallar abiertos ajenos U y V tales que $x \in U$ y $A \subset V$. Así, X es T_3, como se quería demostrar. □

Proposición 6.1.8. *Sea X un espacio topológico regular. Si X es compacto, entonces X es normal.*

Demostración. Como X es un espacio regular, entonces X es T_1, por lo que solo faltaría demostrar que X es T_4. Sean A y B dos subconjuntos cerrados y ajenos de X. Como X es regular, para cada $b \in B$ existen dos vecindades ajenas V_b y U_b, de b y de A, respectivamente. Entonces, $\{V_b\}_{b\in B}$ es una cubierta abierta para B. Pero B es un subconjunto cerrado en el compacto X. Así, en virtud del teorema 6.1.4, B es compacto. De esta manera, podemos asegurar que $\{V_b\}_{b\in B}$ posee una subcubierta finita, $\{V_{b_1}, \ldots, V_{b_n}\}$. Definamos

$$V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{b_i}$$

entonces V es una vecindad de B. Por otro lado, consideremos la intersección

$$U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{b_i}.$$

Como U es intersección finita de conjuntos abiertos, U es abierto. Además, para cada $i \in \{1, ..., n\}$, $A \subset U_{b_i}$, por lo que $A \subset U$.

Por último, observemos que para cada $i \in \{1, ..., n\}$, $U_{b_i} \cap V_{b_i} = \emptyset$. Así, podemos concluir que $U \cap V = \emptyset$. Entonces, U y V son dos vecindades ajenas de A y B, respectivamente. Por lo tanto, X es T_4, como se quería mostrar. □

Como consecuencia directa de las proposiciones 6.1.7 y 6.1.8, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 6.1.9. *Sea X un espacio compacto de Hausdorff. Entonces X es normal.*

Proposición 6.1.10. *Sea X un espacio topológico. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes.*

(1) X es compacto.
(2) Si $\mathcal{B}$ es una base para la topología de X, entonces toda cubierta de X con elementos de $\mathcal{B}$ posee una subcubierta finita.

(3) Existe alguna base $\mathcal{B}$ para la topología de X, tal que toda cubierta de X con elementos de $\mathcal{B}$ posee una subcubierta finita.

Demostración.

(1) $\Rightarrow$ (2) Es evidente, puesto que toda cubierta de X con elementos de $\mathcal{B}$ es una cubierta abierta de X.

(2) $\Rightarrow$ (3) Es inmediato.

(3) $\Rightarrow$ (1) Sea $\mathcal{B}$ una base para la topología de X, tal que toda cubierta de X con elementos de $\mathcal{B}$ posee una subcubierta finita. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una cubierta abierta de X. Como $\mathcal{B}$ es base, para cada $\alpha \in \mathcal{A}$ existe una familia $\{V_\beta\}_{\beta\in\mathcal{A}_\alpha} \subset \mathcal{B}$, tal que $U_\alpha = \bigcup\limits_{\beta\in\mathcal{A}_\alpha} V_\beta$.

Si $\mathcal{H} = \bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{A}_\alpha$, entonces $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta\in\mathcal{H}}$ es una cubierta de X con elementos de $\mathcal{B}$. Por hipótesis, $\mathcal{V}$ posee una subcubierta finita, $\{V_{\beta_1}, \dots, V_{\beta_n}\}$. Para cada $i \in \{1, \dots n\}$ eligamos $\alpha_i \in \mathcal{A}$, tal que $V_{\beta_i} \subset U_{\alpha_i}$. Así, $\{U_{\alpha_1}, \dots U_{\alpha_n}\}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{U}$, lo cual demuestra que X es compacto. $\square$

El siguiente teorema nos muestra una propiedad muy importante de los espacios compactos la cual tiene numerosas aplicaciones, como veremos a lo largo de este texto.

Teorema 6.1.11. *Sean X y Y dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua. Si $A \subset X$ es un subconjunto compacto, entonces $f(A)$ es compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una cubierta de $f(A)$ con abiertos de Y. Como f es continua, entonces la colección $\mathcal{V} = \{f^{-1}(V_\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ es una cubierta de A con abiertos de X. Como A es compacto, $\mathcal{V}$ posee una subcubierta finita $\{f^{-1}(V_{\alpha_1}), \dots f^{-1}(V_{\alpha_n})\}$. Por lo tanto, $\{V_{\alpha_1}, \dots V_{\alpha_n}\}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{U}$, de donde podemos concluir que $f(A)$ es compacto. $\square$

Del teorema anterior, podemos deducir inmediatamente el siguiente corolario.

Corolario 6.1.12. *La compacidad es un invariante topológico.*

Teorema 6.1.13. *Sean X y Y dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua y biyectiva. Si X es compacto y Y es de Hausdorff, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración. Basta demostrar que f es una función cerrada. Sea A un subconjunto cerrado de X. Como X es compacto, del teorema 6.1.4 se sigue que A es compacto. Aplicando el teorema 6.1.11, podemos concluir que $f(A)$ es compacto. Pero Y es de Hausdorff, por lo que, en virtud del teorema 6.1.6, $f(A)$ es cerrado en Y. Así, podemos concluir que f es una función cerrada, y por lo tanto es un homeomorfismo. $\square$

Teorema 6.1.14. *Sean X un espacio topológico y A y B dos subconjuntos compactos. Entonces $A \cup B$ es compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una cubierta de $A \cup B$ con abiertos de X. Definamos

$$\mathcal{U}_A = \{U_\alpha \in \mathcal{U} \mid U_\alpha \cap A \neq \emptyset\}$$

y

$$\mathcal{U}_B = \{U_\alpha \in \mathcal{U} \mid U_\alpha \cap B \neq \emptyset\}.$$

Entonces $\mathcal{U}_A$ es una cubierta de A con abiertos de X. Como A es compacto, enontonces existe una subcubierta finita $\{U_{\alpha_1}, \dots U_{\alpha_n}\}$. Análogamente, existe una subcubierta finita de $\mathcal{U}_B$, digamos $\{U_{\beta_1}, \dots, U_{\beta_m}\}$. Así, $\{U_{\alpha_1}, \dots U_{\alpha_n}\} \cup \{U_{\beta_1}, \dots U_{\beta_m}\}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{U}$. De esta manera, podemos concluir que $A \cup B$ es un subconjunto compacto. $\square$

El teorema anterior se puede generalizar inductivamente en el siguiente corolario:

Corolario 6.1.15. *Sea $\{A_i\}_{i=1}^n$ una familia finita de subconjuntos compactos de un espacio topológico X. Entonces $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ es compacto.*

A continuación veremos algunas propiedades que tienen los subconjuntos compactos de la recta real.

Teorema 6.1.16. *El intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, donde $a < b$, es un espacio compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una cubierta abierta de $[a, b]$. Consideremos el conjunto

$$C = \{x \in [a, b] \mid \text{ existe subcubierta finita para } [a, x]\}.$$

Notemos que $C \neq \emptyset$ ya que $a \in C$. Entonces, C es un conjunto acotado y no vacío, luego existe $\zeta = \sup C$.

Supongamos que $\zeta \neq b$, entonces $\zeta \in [a, b)$. Como $\mathcal{U}$ es cubierta, existe $\beta \in \mathcal{A}$ tal que $\zeta \in U_\beta$. Pero U_β es abierto, por lo que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\zeta \in (\zeta - \varepsilon, \zeta + \varepsilon) \subset U_\beta$. Sea $x \in (\zeta - \varepsilon, \zeta) \cap C$ y $y = \zeta + \varepsilon/2$. Así, $[a, x]$ puede cubrirse por un número finito de elementos de $\mathcal{U}$, digamos $\{U_{\alpha_1}, \dots U_{\alpha_n}\}$. Entonces $[a, x] \cup [x, y] = [a, y]$, y este puede ser cubierto por $\{U_\beta, U_{\alpha_1}, \dots U_{\alpha_n}\}$, lo cual es una subcubierta finita de $\mathcal{U}$. Por lo tanto $y \in C$. Pero esto es una contradicción porque $y > \zeta$ y ζ es el supremo de C. Entonces $\zeta = b$.

Ahora demostremos que $b \in C$. Sabemos que existe $U_\beta \in \mathcal{U}$ tal que $b \in U_\beta$. Como U_β es abierto, existe $\varepsilon > 0$, tal que $(b - \varepsilon, b] \subset U_{\alpha_0}$. Entonces podemos encontrar $x \in (b - \varepsilon, b] \cap C$, por lo que, $[a, x]$ está cubierto por un número finito de elementos de $\mathcal{U}$, digamos $\{U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}\}$. Entonces $[a, b] = [a, x] \cup [x, b]$, está cubierto por $\{U_\beta\} \bigcup \{U_{\alpha_1}, \ldots U_{\alpha_n}\}$, lo cual es una subcubierta finita de $\mathcal{U}$. Por lo tanto $[a, b]$ es compacto, como se quería demostrar. $\square$

Corolario 6.1.17. *Un subconjunto de la recta real es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.*

Demostración. Supongamos que A es compacto. Como $\mathbb{R}$ es un espacio de Hausdorff, y A es compacto, entonces A es cerrado. Por otro lado, consideremos $\mathcal{U} = \{(-n, n)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Entonces $\mathcal{U}$ es una cubierta de A con abiertos de $\mathbb{R}$. Por lo tanto, podemos encontrar una subcubierta finita, digamos $\{U_{n_1}, \ldots, U_{n_m}\}$. Si $k = max\{n_i \mid i = 1, ...m\}$, entonces $A \subset (-k, k)$, por lo que A es un conjunto acotado.

Ahora supongamos que A es cerrado y acotado. Entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A \subset [-k, k]$. Como $[-k, k]$ es compacto (y por tanto es cerrado) entonces A es un subconjunto cerrado en $[-k, k]$. Aplicando el teorema 6.1.4, podemos concluir que A es compacto. $\square$

Corolario 6.1.18. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$, tales que $a < b$. Entonces $[a, b]$ no es homeomorfo a $[a, b)$ ni a (a, b).*

Demostración. Sabemos que los conjuntos $[a, b)$ y (a, b) no son cerrados en $\mathbb{R}$, entonces tampoco son compactos. Pero $[a, b]$ si es compacto, y como la compacidad es un invariante topológico, $[a, b]$ no puede ser homeomorfo a $[a, b)$ ni a (a, b). $\square$

Proposición 6.1.19. *Sea X un espacio topológico compacto, y $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f es acotada.*

Demostración. Por el teorema 6.1.11, $f(X)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. Así, por el corolario 6.1.17 $f(X)$ es acotado, como se quería demostrar. $\square$

Proposición 6.1.20. *Sean X un espacio topológico compacto y $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces existen x_0 y x_1 en X, tales que $f(x_0) = \sup\limits_{x \in X} f(x)$ y $f(x_1) = \inf\limits_{x \in X} f(x)$.*

Demostración. Por el teorema 6.1.11, $f(X)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. Luego, aplicando el corolario 6.1.17 tenemos que $f(X)$ es cerrado y acotado. Además, si X es no vacio, entonces $f(X) \neq \emptyset$. Por la propiedad del supremo, existe $\alpha = \sup\limits_{x \in X} f(X)$. Como el supremo de un conjunto siempre es un punto de adherencia, tenemos que $\alpha \in \overline{f(X)} = f(X)$. Entonces existe $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = \alpha$.

De manera análoga se demuestra que existe $x_1 \in X$, tal que $f(x_1) = \inf\limits_{x\in X} f(x)$. $\square$

Teorema 6.1.21. *Sean X y Y dos espacios topológicos. X y Y son compactos si y solo si $X \times Y$ es compacto*

Demostración. Si $X \times Y$ es compacto, como las proyecciónes $\pi_X : X\times Y \to X$ y $\pi_Y : X\times Y \to Y$ son funciones continuas, por el teorema 6.1.11 tenemos que $X = \pi_X(X \times Y)$ y $Y = \pi_Y(X \times Y)$ son compactos.

Ahora, supongamos que X y Y son compactos. Para demostrar que $X\times Y$ es compacto, en virtud de la proposición 6.1.10, basta demostrar que cualquier cubierta de $X \times Y$ con abiertos básicos posee una subcubierta finita. Sean $\mathcal{U}$ una cubierta de $X \times Y$ formada por abiertos básicos canónicos. Fijemos un punto arbitrario $x \in X$. Para cada $(x, y) \in \{x\} \times Y$ existe un elemento

$$U_{xy} = W_{xy} \times V_{xy} \in \mathcal{U}$$

que contiene a (x, y). La colección $\{V_{xy}\}_{y\in Y}$ es una cubierta abierta para Y. Pero Y es compacto, entonces existe una subcubierta finita, digamos $\{V_{xy_1}, \ldots, V_{xy_n}\}$. Consideremos el abierto

$$O_x = \bigcap_{i=1}^{n} W_{xy_i}.$$

entonces O_x es una vecindad de x en X. Además,

$$\{x\} \times Y \subset O_x \times Y \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{xy_i}$$

Si repetimos este argumento para cada $x \in X$, la familia $\{O_x\}_{x\in X}$ constituye una cubierta abierta para X. Como X es compacto, existe una subcubierta finita $\{O_{x_1}, \ldots, O_{x_m}\}$.

Recordemos que por cada x_i, existen $y_{i_1}, y_{i_2} \ldots y_{i_{n_i}} \in Y$, y una colección finita de abiertos $\{U_{x_iy_{i_j}} = W_{x_iy_{i_j}} \times V_{x_iy_{i_j}}\}_{j=1}^{n_i} \subset \mathcal{U}$, tales que

$$O_{x_i} = \bigcap_{j=1}^{n_i} W_{x_iy_{i_j}}$$

y

$$O_{x_i} \times Y \subset \bigcup_{j=1}^{n_i} U_{x_iy_{i_j}}.$$

Asi, la colección $\{U_{x_iy_{i_j}} \mid i = 1, \ldots m,\ j = 1, \ldots n_i\}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{U}$. Por lo tanto, $X \times Y$ es compacto, como se quería demostrar. $\square$

A continuación, introduciremos un nuevo concepto que nos ayudará a dar una útil caracterización de los espacios compactos.

Definición 6.1.22. *Se dice que una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X es* ***centrada*** *o tiene* ***la propiedad de intersección finita****, si para cada subcolección finita $\{F_1, ..., F_n\} \subset \mathcal{F}$, se tiene $\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i \neq \emptyset$.*

Teorema 6.1.23. *Un espacio topológico X es compacto si y sólo si toda familia centrada de subconjuntos cerrados de X tiene intersección no vacía.*

Demostración. Primero supongamos que X es compacto, Sea $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una familia centrada de subconjuntos cerrados de X. Para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, sea $U_\alpha = X \setminus F_\alpha$. Así, $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ es una colección de subconjuntos abiertos de X. Supongamos que $\bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha = \emptyset$. Entonces

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} (X \setminus F_\alpha) = X \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha \right) = X.$$

Así, $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X, y como X es compacto, tiene una subcubierta finita, digamos $\{U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}\}$. De esta manera, tenemos que $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$ o equivalentemente $\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} = \emptyset$.

Pero esto útimo es una contradicción, pues $\mathcal{F}$ es una familia centrada. Entonces, podemos concluir que $\bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha \neq \emptyset$, como se quería probar.

Ahora supongamos que cada familia centrada de cerrados tiene intersección no vacía. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una cubierta abierta de X. Supongamos que $\mathcal{U}$ no tiene ninguna subcubierta finita. Entonces, para cualquier familia $\{U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}\} \subset \mathcal{U}$, tenemos que

$$X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} \neq \emptyset. \tag{13}$$

Consideremos la familia de cerrados $\mathcal{F} = \{F_\alpha = X \setminus U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$. Entonces por (13) $\mathcal{F}$ es una familia centrada. Por la hipótesis $\mathcal{F}$ tiene intersección no vacía, i.e., $\bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha \neq \emptyset$. Así,

$$X \setminus \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha = X \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha \neq \emptyset.$$

Esto es una contradicción, porque $\mathcal{U}$ es una cubierta de X. De esta manera, podemos concluir que $\mathcal{U}$ tiene una subcubierta finita, y por lo tanto, X es compacto. □

6.2. Teorema de Tychonoff

Anteriormente, hemos demostrado que el producto de dos espacios topológicos compactos es compacto. Claramente, este resultado se generaliza inductivamente al caso de un número finito de espacios compactos. Sin embargo, el resultado es aún más general. Resulta ser que el producto de una familia arbitraria de espacios compactos es compacto. Para demostrar este importante resultado, conocido como el teorema de Tychonoff, es necesario tener presentes ciertas herramientas que nos servirán para la prueba.

Definición 6.2.1. *Sea X un conjunto no vacío y $\preceq$ una relación en X. Decimos que $\preceq$ es una **relación de orden** si se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *$x \preceq x$ (reflexividad).*
2. *Si $x \preceq y$ y $y \preceq x$, entonces $x = y$ (antisimetría).*
3. *Si $x \preceq y$ y $y \preceq z$, entonces $x \preceq z$ (transitividad).*

*El par $(X, \preceq)$ se llama **conjunto parcialmente ordenado**. Además, si para cualquier par de puntos $x, y \in X$ o bien $x \preceq y$ ó $y \preceq x$, entonces se dice que $(X, \preceq)$ es un **conjunto linealmente ordenado** o **totalmente ordenado**.*

Definición 6.2.2.

1. *Sean $(X, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $a \in X$. Decimos que a es **maximal** si no existe ningún $b \in X$ tal que $a \preceq b$ y $a \neq b$.*
2. *Sea $A \subset X$. Una **cota superior** de A es un elemento $x \in X$, tal que para cualquier $a \in A$, $a \preceq x$.*

El siguiente lema es una de las múltiples formas equivalentes del Axioma de Elección, el cual es muy importante en la teoría de conjuntos, y es una herramienta básica para el manejo de conjuntos infinitos. Para los fines de estas notas, nos limitaremos solamente a mencionar el lema, el cual es fundamental en la demostración del Teorema de Tychonoff.

Lema 6.2.3 (Lema de Zorn)**.** *Sea $(X, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Si cualquier subconjunto linealmente ordenado $A \subset X$ posee una cota superior, entonces X tiene un elemento maximal.*

La última herramienta que necesitamos para la demostración del Teorema de Tychonoff es el siguiente lema.

Lema 6.2.4. *Sean X un espacio topológico y $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una familia centrada de subconjuntos de X. Entonces, existe una familia centrada $\mathcal{G}$ de subconjuntos de X tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ y $\mathcal{G}$ es maximal con estas propiedades. Más precisamente, existe un elemento maximal $\mathcal{G}$ para $(\mathbb{A}, \subset)$, donde*

$$\mathbb{A} = \{\mathcal{H} \subset 2^X \mid \mathcal{F} \subset \mathcal{H} \text{ y } \mathcal{H} \text{ es centrada}\}$$

y $\subset$ es la inclusión conjuntista.

Demostración. Sean X un espacio topológico, $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una familia centrada en X. Consideremos $\mathbb{A} = \{\mathcal{H} \subset 2^X \mid \mathcal{F} \subset \mathcal{H}$ y $\mathcal{H}$ es centrada$\}$. Claramente, el par $(\mathbb{A}, \subset)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Afirmamos que $(\mathbb{A}, \subset)$ satisface las hipótesis del Lema de Zorn. En efecto, sea $\mathbb{B} \subset \mathbb{A}$ linealmente ordenado y $\mathcal{C} = \bigcup\limits_{\mathcal{B}\in\mathbb{B}} \mathcal{B} \subset 2^X$. Verifiquemos que $\mathcal{C} \in \mathbb{A}$. Como $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}$ para cualquier $\mathcal{B} \in \mathbb{B}$, entonces $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}$.

Demostremos que $\mathcal{C}$ es centrada. Si $C_1, C_2, ..., C_n \in \mathcal{C}$, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$ existe $\mathcal{B}_i$, tal que $C_i \in \mathcal{B}_i$. Como $\mathbb{B}$ es linealmente ordenado, existe $\mathcal{B}_k$ el máximo de todos los elementos $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, ...\mathcal{B}_n$. Entonces, para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $C_i \in \mathcal{B}_i \subset \mathcal{B}_k$. Como $\mathcal{B}_k$ es centrada, tenemos que $\bigcap\limits_{i=1}^{n} C_i \neq \emptyset$. De esta manera podemos concluir que $\mathcal{C}$ es centrada, y por lo tanto, $\mathcal{C} \in \mathbb{A}$.

Notemos que para cualquier $\mathcal{B} \in \mathbb{B}$, $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ por lo que $\mathcal{C}$ es cota superior para $\mathbb{B}$. Así que $(\mathbb{A}, \subset)$ satisface las hipótesis del Lema de Zorn, y en consecuencia podemos garantizar que existe $\mathcal{G} \in \mathbb{A}$ un elemento maximal. Es decir, existe una familia centrada $\mathcal{G} \subset 2^X$ tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ y $\mathcal{G}$ es maximal con estas propiedades. □

Teorema 6.2.5 (De Tychonoff). *Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una familia de espacios compactos. Entonces el producto $X = \prod\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$ es compacto.*

Demostración. Consideremos una familia centrada $\mathcal{F} \subset 2^X$ de conjuntos cerrados. En virtud del teorema 6.1.23, basta demostrar que $\mathcal{F}$ tiene intersección no vacía.

Por el lema 6.2.4, sabemos que existe una familia centrada $\mathcal{G}$ de subconjuntos de X tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ y $\mathcal{G}$ es maximal con estas propiedades.

La maximalidad de $\mathcal{G}$ implica las siguientes dos propiedades:

(1) La intersección de cualquier número finito de elementos de $\mathcal{G}$, también pertenece a $\mathcal{G}$.
(2) Si un conjunto $A \subset X$ interseca a la intersección de cualquier número finito de elementos de $\mathcal{G}$, entonces $A \in \mathcal{G}$.

Para demostrar la primera propiedad consideremos una colección finita arbitraria $\{G_1, \ldots, G_n\} \subset \mathcal{G}$ y sea $H = \bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$. Entonces, la familia $\mathcal{G} \cup \{H\}$ también es centrada y contiene a $\mathcal{F}$. Además, notemos que $\mathcal{G} \cup \{H\} \supset \mathcal{G}$. Entonces, por la maximalidad de $\mathcal{G}$, podemos concluir que $\mathcal{G} = \mathcal{G} \cup \{H\}$, es decir, que $H \in \mathcal{G}$.

Luego, para demostrar la segunda afirmación, notemos simplemente que si $A \subset X$ intersecta a la intersección de cualquier número finito de elementos de $\mathcal{G}$, entonces la familia $\mathcal{G}\cup\{A\}$ también es centrada y contiene a $\mathcal{F}$. Luego, la maximalidad de $\mathcal{G}$ nos asegura que $A\in\mathcal{G}$.

Para cada $\alpha\in\mathcal{A}$, sea $\pi_\alpha : X\to X_\alpha$ la α-ésima proyección. Denotemos por $\mathcal{H}_\alpha$ a la siguiente familia

$$\mathcal{H}_\alpha=\left\{\overline{\pi_\alpha(G)}\subset X_\alpha \mid G\in\mathcal{G}\right\}.$$

Afirmamos que $\mathcal{H}_\alpha$ es una familia centrada en X_α. En efecto, si $\overline{\pi_\alpha(G_1)},\dots,\overline{\pi_\alpha(G_n)}$ son elementos de $\mathcal{H}_\alpha$, entonces $\bigcap\limits_{i=1}^n G_i\neq\emptyset$ ya que $G_1,...G_n\in\mathcal{G}$ y $\mathcal{G}$ es una familia centrada. Así

$$\emptyset\neq\bigcap_{i=1}^n G_i\subset\overline{\bigcap_{i=1}^n G_i}.$$

Por lo que $\pi_\alpha\left(\overline{\bigcap\limits_{i=1}^n G_i}\right)\neq\emptyset$. Luego, aplicando la continuidad de la función π_α, tenemos que

$$\pi_\alpha\left(\overline{\bigcap_{i=1}^n G_i}\right)\subset\overline{\pi_\alpha\left(\bigcap_{i=1}^n G_i\right)}\subset\overline{\bigcap_{i=1}^n \pi_\alpha(G_i)}\subset\bigcap_{i=1}^n\overline{\pi_\alpha(G_i)}.$$

De donde podemos concluir inmediatamente que $\bigcap\limits_{i=1}^n\overline{\pi_\alpha(G_i)}\neq\emptyset$, y por lo tanto, $\mathcal{H}_\alpha$ es una familia centrada de subconjuntos cerrados en X_α. Pero X_α es un espacio compacto, por lo que podemos aplicar el teorema 6.1.23 para encontrar un punto $x_\alpha\in\bigcap\limits_{G\in\mathcal{G}}\overline{\pi_\alpha(G)}$ para cada $\alpha\in\mathcal{A}$. Consideremos el punto $x=\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}\in X$ y demostremos que $x\in\bigcap\limits_{G\in\mathcal{G}}\overline{G}$.

Sea

$$U=\langle U_{\alpha_1},...,U_{\alpha_n}\rangle$$

una vecindad básica para x. Notemos que U_{α_i} es una vecindad del punto $x_{\alpha_i}\in\bigcap\limits_{G\in\mathcal{G}}\overline{\pi_{\alpha_i}(G)}$ en X_{α_i}. Por consiguiente U_{α_i} interseca a $\pi_{\alpha_i}(G)$ para toda $G\in\mathcal{G}$. Así, el conjunto $\langle U_{\alpha_i}\rangle=\prod\_{\alpha_i}{}^{-1}(U_{\alpha_i})$ interseca a cada uno de los elementos de $\mathcal{G}$. En particular, si $G_1,\dots G_n$ pertenecen a $\mathcal{G}$, entonces por la propiedad (1), $G=\bigcap\limits_{i=1}^n G_i\in\mathcal{G}$, y por lo tanto $\langle U_{\alpha_i}\rangle\cap G\neq\emptyset$. Es decir, $\langle U_{\alpha_i}\rangle$ interseca cualquier intersección finita de elementos de $\mathcal{G}$. Luego, por la propiedad (2), $\langle U_{\alpha_i}\rangle\in\mathcal{G}$ para cualquier $i\in\{1,...,n\}$. Usando nuevamente la afirmación (1), podemos concluir que la intersección $\bigcap\limits_{i=1}^n\langle U_{\alpha_i}\rangle=\langle U_{\alpha_1},\dots U_{\alpha_n}\rangle$

pertenece a $\mathcal{G}$. Como $\mathcal{G}$ es centrada, tenemos

$$\langle U_{\alpha_1}, \dots U_{\alpha_n} \rangle \cap G \neq \emptyset$$

para cada $G \in \mathcal{G}$, así que $x \in \overline{G}$ para cada $G \in \mathcal{G}$,y por tanto, $\bigcap_{G \in \mathcal{G}} \overline{G} \neq \emptyset$. Finalmente, como $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, tendremos

$$\bigcap_{G \in \mathcal{G}} \overline{G} \subset \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F.$$

De aquí se infiere que $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$.

Así, la familia $\mathcal{F}$ tiene intersección no vacía, lo cual demuestra que X es compacto.

□

6.3. Compacidad en espacios métricos

Definición 6.3.1. *Sean (X, d) un espacio métrico, $\varepsilon > 0$ y $A \subset X$. Se dice que A es ε-**denso** en X o que es una $\varepsilon-$red para X, si*

$$\bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon) = X$$

donde $B(a, \varepsilon)$ denota la bola de radio ε y centro en a.

*Si para toda $\varepsilon > 0$, existe una $\varepsilon-$red finita $A_\varepsilon = \{a_1, \dots, a_n\}$, entonces diremos que el espacio X es **totalmente acotado**.*

Proposición 6.3.2. *Un espacio métrico es totalmente acotado si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe una colección finita $\{A_1, \dots, A_n\}$ de subconjuntos de X tales que $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ y el diámetro de cada A_i es menor o igual a ε.*

Demostración. Supongamos que X es totalmente acotado y fijemos $\varepsilon > 0$. Entonces existe una $\frac{\varepsilon}{2}$-red finita $A_{\varepsilon/2} = \{a_1, \dots, a_n\}$. Definiendo $A_i = B(a_i, \varepsilon/2)$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ obtenemos la colección de subconjuntos de X buscada.

Recíprocamente, para cada $\varepsilon > 0$ es posible escoger subconjuntos no vacíos $A_1, \dots, A_n$ de X tales que $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ con diám $A_i \leq \varepsilon/2$ para toda $i \in \{1, \dots, n\}$. Eligiendo para cada i un punto $a_i \in A_i$, tendremos que $A_i \subset B(a_i, \varepsilon)$, por lo que $X \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, \varepsilon)$, lo que nos permite concluir que X es totalmente acotado. □

Proposición 6.3.3. *Sean X un espacio métrico totalmente acotado y $A \subset X$. Entonces A es totalmente acotado.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Por la proposición 6.3.2, existen $X_1, \ldots, X_n$ subconjuntos de X tales que $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$ y diám $X_i \leq \varepsilon$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. Definiendo $A_i = X_i \cap A$, resulta claro que los conjuntos $A_1, \ldots, A_n$ satisfacen $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ y diám $A_i \leq \varepsilon$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por la proposición 6.3.2, A es totalmente acotado. □

Definición 6.3.4. *Sea (X, d) un espacio métrico. Una sucesión, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, se llama **fundamental** o de **Cauchy**, si para toda $\varepsilon > 0$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq M$ y $m \geq M$, entonces $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.*

Proposición 6.3.5. *Sea X un espacio métrico y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ una sucesión convergente. Entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Por la definición de convergencia, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq M$ entonces $d(x_n, x) < \varepsilon/2$. Así, para $n \geq M$ y $m \geq M$, se tiene

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Por lo tanto $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. □

Proposición 6.3.6. *Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en el espacio métrico (X, d). Si existe una subsucesión (x_{n_k}) que converge a un punto x, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como (x_{n_k}) converge a x, existe $M_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n_k \geq M_1$, entonces $d(x_{n_k}, x) < \varepsilon/2$. Como $(x_n)_{\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, existe $M_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq M_2$ y $m \geq M_2$, entonces $d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$.

Sea $M = \max\{M_1, M_2\}$. Entonces, para $n \geq M$ y $n_k \geq M$ tendremos:

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Por lo tanto $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x, como se quería demostrar. □

Definición 6.3.7. *Se dice que un espacio métrico X es **completo**, si cualquier sucesión de Cauchy en X es convergente.*

Ejemplo 6.3.1. El conjunto $\{0\} \cup \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ con la métrica inducida de la recta real es un espacio completo.

Ejemplo 6.3.2. El conjunto $(0, 1)$ con la métrica inducida de la recta real no es un espacio completo. En efecto, la sucesión $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, pero no converge en $(0, 1)$.

Proposición 6.3.8. *Sean (X, d) un espacio métrico completo y $A \subset X$ un subconjunto cerrado. Entonces A es completo.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en A. Entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en X y como X es completo, existe $x = \lim_{n\to\infty} x_n \in X$. Así, x es un punto de adherencia de A, y ya que A es cerrado, $x \in A$, como se quería demostrar. $\square$

Proposición 6.3.9. *Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$ un subespacio completo. Entonces A es cerrado.*

Demostración. Sea $a \in \overline{A}$. Como X es primero numerable, podemos construir una sucesión contenida en A, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente en X, por la proposición 6.3.5, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es sucesión de Cauchy en X y por lo tanto $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es sucesión de Cauchy en A. Pero A es completo, por lo que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene un límite en A. Pero una sucesión convergente en un espacio métrico tiene un único límite, lo cual implica que $a \in A$. Así, $\overline{A} \subset A$, probando que A es cerrado.

$\square$

Definición 6.3.10. *Se dice que un espacio topológico X es* ***secuencialente compacto****, si toda sucesión en X tiene una subsucesión convergente.*

Teorema 6.3.11. *Un espacio métrico (X, d) es secuencialmente compacto, si y sólo si (X, d) es totalmente acotado y completo.*

Demostración. Supongamos que X es secuencialmente compacto. Para demostrar que X es completo, consideremos una sucesión de Cauchy arbitraria, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X. Por hipótesis, existe una subsucesión convergente, $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. En virtud de la proposición 6.3.6, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también converge. Por lo tanto, X es un espacio completo.

Demostraremos por contrapositiva que X es totalmente acotado. Supongamos lo contrario. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier subconjunto finito $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ de X, se tiene

$$X \neq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon).$$

Para demostrar que X no es secuencialmente compacto, construiremos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ la cual no contendrá ninguna subsucesión convergente.

Sea x_1 un punto arbitrario de X. Entonces

$$X \neq B(x_1, \varepsilon),$$

por lo que existe $x_2 \in X \setminus B(x_1, \varepsilon)$. Pero

$$X \neq B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon),$$

por lo que podemos encontrar un punto

$$x_3 \in X \setminus \big(B(x_1, \varepsilon) \bigcup B(x_2, \varepsilon)\big).$$

Continuando con este procedimiento, podemos encontrar una sucesión $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n \notin \bigcup_{m<n} B(x_m, \varepsilon). \tag{14}$$

Afirmamos que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no posee ninguna subsucesión convergente. En efecto, notemos que (14) implica que para cualquier $n, m \in \mathbb{N}$,

$$d(x_n, x_m) \geq \varepsilon. \tag{15}$$

De esta manera, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tuviera una subsucesión convergente, esta sería de Cauchy, pero por la la desigualdad (15), eso es imposible. Por lo tanto $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no posee ninguna subsucesión convergente. Así, llegamos a que X no puede ser secuencialmente compacto, como se quería demostrar.

Ahora supongamos que (X, d) es totalmente acotado y completo. Para demostrar que X es secuencialmente compacto consideremos una sucesión arbitraria $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X y demostremos que contiene una subsucesión convergente.

Como X es totalmente acotado, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar un conjunto $1/n$-denso, $A_n = \{a_1^n, \ldots, a_{p_n}^n\}$.

Como el conjunto $A_1 = \{a_1^1, \ldots, a_{p_1}^1\}$ es 1-denso en X, tenemos que

$$X = \bigcup_{i=1}^{p_1} B(a_i^1, 1).$$

Así, existe $i \in \{1, \ldots, p_1\}$ tal que la bola $B(a_i^1, 1)$ contiene un número infinito de elementos de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sea C_1 el conjunto de todos los términos de la sucesión contenidos en $B(a_i^1, 1)$. Definamos

$$n_1 = \min_{n\in\mathbb{N}}\{n \mid x_n \in C_1\},$$

y consideremos el término x_{n_1} de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Para $n = 2$, consideremos $A_2 = \{a_1^2, \ldots, a_{p_2}^2\}$. Entonces,

$$X = \bigcup_{i=1}^{p_2} B(x_i^2, 1/2),$$

y como C_1 es un conjunto infinito, existe una bola, $B(a_i^2, 1/2)$, que contiene un número infinito de elementos de C_1. Sea $C_2 = C_1 \cap B(a_i^2, 1/2)$, y definamos

$$n_2 = \min_{n\in\mathbb{N}}\{n \mid x_n \in C_2 \text{ y } n > n_1\},$$

y consideremos el término x_{n_2} de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Continuando con este procedimiento, para cada $k \in \mathbb{N}$, podemos encontrar $a_i^k \in A_k$ tal que la bola $B(x_i^k, 1/k)$ contiene una infinidad de términos del conjunto C_{k-1}. Así, si $C_k = B(x_i^k, 1/k) \cap C_k$ podemos definir

$$n_k = \min_{n\in\mathbb{N}}\{n \mid x_n \in C_k \text{ y } n > n_{k-1}\}.$$

Notemos que (x_{n_k}) es una sucesión de Cauchy. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $1/M < \varepsilon/2$. Entonces, para $k, j > M$, existe $a_i^M \in A_M$, tal que x_{n_k}, $x_{n_j} \in B(a_i^M, 1/M)$. Así,

$$d(x_{n_k}, x_{n_j}) \leq d(x_{n_k}, a_i^M) + d(a_i^M, x_{n_j}) < 1/M + 1/M = 2/M < \varepsilon,$$

lo cual demustra que (x_{n_k}) es una sucesión de Cauchy. Y como X es completo, (x_{n_k}) converge. Por lo tanto X es secuencialemte compacto. □

Proposición 6.3.12. *Sea (X, d) un espacio métrico totalmente acotado. Entonces (X, d) es separable.*

Demostración. Como X es totalmente acotado, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un conjunto $\frac{1}{n}$−denso, $A_n = \{a_1^n, a_2^n, \ldots, a_{p_n}^n\}$. Consideremos el conjunto

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

A es unión numerable de subconjuntos finitos, y por tanto, es numerable. Ahora demostremos que A es denso en X. Sea U un abierto cualquiera de X. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset U$, y podemos encontrar $k \in \mathbb{N}$ tal que $1/k < \varepsilon$. Consideremos el conjunto A_k. Entonces $X = \bigcup_{i=1}^{p_k} B(a_i^k 1/k)$, por lo que existe $a_i^k \in A_k$ tal que $x \in B(a_i^k, 1/k)$. Así, $d(x, a_i^k) < 1/k$, y consecuentemente

$$a_i^k \in B(x, 1/k) \subset B(x, \varepsilon) \subset U.$$

Por lo tanto $A \cap U \neq \emptyset$, lo cual demuestra que A es denso en X. Así podemos concluir que X es separable. □

Definición 6.3.13. *Se dice que un espacio topológico X es **numerablemente compacto**, si toda cubierta abierta numerable de X tiene subcubierta finita.*

Teorema 6.3.14. *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) (X, d) es compacto,

(2) (X,d) *es numerablemente compacto,*
(3) (X,d) *es secuencialmente compacto.*

Demostración.
(1) $\Rightarrow$ (2) Es evidente.

(2) $\Rightarrow$ (3) En virtud del teorema 6.3.11, basta demostrar que X es completo y totalmente acotado. Lo haremos por contradicción.

Primero supongamos que X no es completo. Entonces existe una sucesión de Cauchy, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la cual no converge. Además, como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, no puede contener ninguna subsucesión convergente. Consideremos el conjunto: $A = \{x_1, x_2, \dots\} \subset X$. Entonces, si $x \in X \setminus A$, como ninguna subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x, existe una vecindad U de x, tal que $U \cap A = \emptyset$. Por lo tanto, A es un subconjunto cerrado de X. Análogamente, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una vecindad U_n del punto x_n, tal que $U_n \cap A = \{x_n\}$. Sea $\mathcal{U} = \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{X \setminus A\}$. Entonces $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta numerable de X. Por (2), existe una subcubierta finita, digamos $\{U_{n_1}, \dots, U_{n_k}, X\setminus A\}$. Esto implica que $A \subset U_1 \cup \ldots \cup U_{n_k}$, lo cual es imposible porque $U_n \cap A = \{x_n\}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Esta contradicción nos permite concluir que X es un espacio completo.

Ahora supongamos que X no es totalmente acotado. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier subconjunto finito, $\{a_1, \dots, a_n\}$, se tiene

$$X \neq \bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, \varepsilon).$$

Sea $x_1 \in X$ un punto fijo, entonces $X \neq B(x_1, \varepsilon)$. Por lo tanto, existe $x_2 \in X \setminus B(x_1, \varepsilon)$. Como

$$X \neq B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon),$$

existe $x_3 \in X \setminus \big(B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon)\big)$.

Continuando con este procedimiento, podemos construir el conjunto $A = \{x_1, x_2, \dots x_n \dots\}$, el cual satisface la propiedad de que para toda $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \neq m$, se tiene

$$d(x_n, x_m) \geq \varepsilon. \tag{16}$$

Consideremos la familia $\{B(x_n, \varepsilon/4)\}_{n\in\mathbb{N}}$. El hecho de que para $n \neq m$,

$$B(x_n, \varepsilon/4) \bigcap B(x_m, \varepsilon/4) = \emptyset,$$

nos garantiza que A es un subconjunto cerrado, por lo que la familia $\{B(x_n, \varepsilon/4)\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{X \setminus A\}$ es una cubierta abierta numerable para X. Por hipótesis, existe una subcubierta finita, digamos $\{B(x_{n_1}, \varepsilon/4), \dots, B(x_{n_k}, \varepsilon/4), X \setminus A\}$. Así, si $x_m \notin \{x_{n_1}, \dots, x_{n_k}\}$, entonces

$$x_m \notin (X \setminus A) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} B(x_{n_i}, \varepsilon/4) \right).$$

Por lo que $\{B(x_{n_1}, \varepsilon/4), \ldots, B(x_{n_k}, \varepsilon/4), X \setminus A\}$ no cubre a X. Esta contradicción demuestra que X es totalmente acotado.

(3) $\Rightarrow$ (2) Por contradicción. Supongamos que X no es numerablemente compacto. entonces existe una cubierta numerable de X, $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, la cual no posee ninguna subcubierta finita. Así, existe $x_1 \in X \setminus U_1$. De igual manera, podemos tomar un punto $x_2 \in X \setminus (U_1 \cup U_2)$. Continuando con este procedimiento, podemos formar una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con la propiedad de que

$$x_m \notin \bigcup_{i=1}^{n} U_n, \quad \text{para todo } m \geq n. \tag{17}$$

Como X es secuencialmente compacto, existe una subsucesión (x_{n_k}) convergente.

Sea $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$. Entonces existe $m \in \mathbb{N}$, tal que $x \in U_m$. Por (17), si $n_k > m$ entonces $x_{n_k} \notin U_m$. Por otro lado, como (x_{n_k}) converge a x, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n_k > M$, $x_{n_k} \in U_m$. Entonces, si $n_k > M$ y $n_k > m$, $x_{n_k} \in U_m$ y $x_{n_k} \notin U_m$. Esta contradicción nos permite concluir que X es contablemente compacto.

(2) $\Rightarrow$ (1) Si X es numerablemente compacto, por lo demostrado anteriormente, X es secuencialmente compacto. Entonces por el teorema 6.3.11, X es totalmente acotado y completo. Luego, por la proposición 6.3.12 X es separable. Así, en virtud de la proposición 3.7.4 X es segundo numerable. Sea $\mathcal{B} = \{V_n\}$, una base numerable para la topología de X. Para demostrar que X es compacto, por el teorema 6.1.10, basta probar que cualquier cubierta de X con elementos de $\mathcal{B}$ tiene subcubierta finita. Pero esto es evidente, porque cualquier cubierta con elementos de $\mathcal{B}$ es a lo más numerable, y como X es numerablemente compacto, posee una subcubierta finita. Por lo tanto X es compacto. $\square$

Teorema 6.3.15 (El número de Lebesgue)**.** *Sea (X, d) un espacio métrico compacto, y $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una cubierta abierta de X. Entonces, existe $\delta > 0$ tal que para cualquier subconjunto A de X, con* diam $A < \delta$*, existe $U_\alpha \in \mathcal{U}$ tal que $A \subset U_\alpha$. El número δ recibe el nombre de* ***número de Lebesgue****.*

Demostración. Como X es un espacio compacto, existe una subcubierta finita de $\mathcal{U}$, digamos $\{U_{\alpha_1}, ..., U_{\alpha_n}\}$. Definamos la función $f : X \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \text{máx}\left\{d(x, X \setminus U_{\alpha_i}) \mid i \in \{1, \ldots, n\}\right\} \text{ para toda } x \in X.$$

Como la distancia de un punto a un conjunto es una función continua (ver la demostración de la proposición 5.2.3), y el máximo entre dos funciones continuas h y g puede expresarse como composición de funciones continuas en la forma $\max\{h(x), g(x)\} = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|)$, podemos deducir por inducción que f es continua.

Afirmamos que para culaquier punto $x \in X$, $f(x) > 0$. En efecto, supongamos que existe $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = 0$, entonces, $d(x_0, X \setminus U_{\alpha_i}) = 0$ para cualquier $i \in \{1, ..., n\}$. Como $X \setminus U_{\alpha_i}$ es un subconjunto cerrado, tendríamos que $x_0 \in X \setminus U_{\alpha_i}$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$. Entonces,

$$x_0 \notin \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} = X.$$

Esta contradicción nos permite concluir que para cualquier $x \in X$,

$$f(x) > 0. \tag{18}$$

Por otro lado, como X es compacto y f es continua, f alcanza sus valores extremos (vease proposición 6.1.20). En particular, existe $y \in X$ tal que $f(y) = \min\{f(x); x \in X\}$. Sea $\delta = f(y)$. Afirmamos que δ es el número que buscamos. En efecto, por (18), $\delta > 0$. Por otra parte, si A es un subconjunto de X, tal que *diam* $A < \delta$, y $a \in A$, entonces $f(a) = d(a, X \setminus U_{\alpha_k})$ para algún $k \in \{1, \ldots, n\}$. Se sigue que $A \subset B(a, \delta) \subset U_{\alpha_k}$. □

6.4. Espacios Localmente Compactos

En esta sección estudiaremos los espacios topológicos localmente compactos. Esta propiedad, aunque es más débil que la compacidad, aporta al espacio topológico numerosas características deseables.

Definición 6.4.1. *Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Se dice que una vecindad U de x es **relativamente compacta** o **precompacta** si su cerradura $\overline{U}$ es compacta. Decimos que X es **localmente compacto** si para cada punto $x \in X$ y cada vecindad U de x, existe un abierto precompacto V tal que $x \in V \subset \overline{V} \subset U$.*

Veamos algunos ejemplos que ilustren la definición anterior.

Ejemplo 6.4.1. El espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ es localmente compacto, ya que para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, la bola $B(x, r)$ tiene cerradura compacta.

Ejemplo 6.4.2. Cualquier espacio topológico discreto X es localmente compacto. En efecto, para todo $x \in X$, la vecindad $\{x\}$ es compacta.

Como ejemplo de un espacio no localmente compacto, tenemos el siguiente espacio.

Ejemplo 6.4.3. Sea ℓ_2 el espacio de Hilbert introducido en el capítulo 1. Entonces ℓ_2 no es localmente compacto.

Demostración. Por contradicción. Supongamos que existe una vecindad U del punto $0 = (0, 0, 0, ...)$, tal que $\overline{U}$ es compacto. Entonces, existe $r > 0$ de modo que

$$B(0, r) = \{x \in l_2 \;\big|\; \| x \| < r\} \subset U.$$

Así $\overline{B(0, r)} \subset \overline{U}$, y por el teorema 6.1.4, $\overline{B(0, r)}$ es compacto.

Como ℓ_2 es un espacio métrico, podemos usar el teorema 6.3.14 para concluir que $\overline{B(0, r)}$ es secuencialmente compacto. Consideremos la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $x_n = (0, 0, ..., 0, r, 0, ...)$ con r en la n-ésima coordenada. Así, $\|x_n\| = r$, y por lo tanto $x_n \in \overline{B(0, r)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\overline{B(0, r)}$ es secuencialmente compacto, existe una subsucesión convergente (x_{n_k}). Por la proposición 6.3.5, dicha subsucesión es de Cauchy. Pero para cualquier n_k y n_j tenemos

$$\|x_{n_k} - x_{n_j}\| = \sqrt{2}r,$$

por lo que (x_{n_k}) no puede ser sucesión de Cauchy. Esta contradicción nos permite concluir que ℓ_2 no es localmente compacto. □

Ejemplo 6.4.4. El conjunto de los números racionales con la topología inducida de la recta real no es localmente compacto.

Demostración. De hecho ningún punto $x \in \mathbb{Q}$ tiene una vecindad precompacta. Supongamos que U es una vecindad de $x \in \mathbb{Q}$ tal que su cerradura $\overline{U}$ en $\mathbb{Q}$ es compacta. Entonces existe un intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$ tal que $x \in (a, b) \cap \mathbb{Q} \subset [a, b] \cap \mathbb{Q} \subset \overline{U}$. Cabe observar que $[a, b] \cap \mathbb{Q}$ es la cerradura del conjunto $(a, b) \cap \mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$. Entonces, $[a, b] \cap \mathbb{Q}$ siendo un subconjunto cerrado del compacto $\overline{U}$, es compacto. Por otro lado, un subconjunto compacto de la recta real $\mathbb{R}$ tiene que ser cerrado en $\mathbb{R}$. Por lo tanto $[a, b] \cap \mathbb{Q}$ es cerrado en $\mathbb{R}$, una contradicción. □

Proposición 6.4.2. *Sea X un espacio de Hausdorff. Entonces X es localmente compacto si y sólo si cada $x \in X$ tiene una vecindad U precompacta.*

Demostración. Basta demostrar la suficiencia del enunciado. Supongamos que existe una vecindad U de x, tal que $\overline{U}$ es compacto, y sea V una vecindad arbitraria de x. Entonces, como X es de Hausdorff, también $\overline{U}$ es de Hausdorff. Así, aplicando el Teorema 6.1.7 podemos inferir que $\overline{U}$ es un espacio regular y por lo tanto U es un espacio regular. Entonces existe una vecindad W abierta en $\overline{U}$ tal que

$$x \in W \subset \overline{W} \subset V \cap U,$$

donde $\overline{W}$ es la cerradura de W en $\overline{U}$. Como W está contenido en U y es abierto en $\overline{U}$, inferimos que es abierto en U y por tanto en X. Tenemos además que $\overline{W}$ es un subconjunto cerrado del compacto $\overline{U}$ y por lo tanto es compacto. Ya que X es de Hausdorff y $\overline{W}$ es compacto, $\overline{W}$ debe ser cerrado en X, y por tanto $\overline{W}$ es también la cerradura de W en X. Vemos así que W es una vecindad precompacta de x, y además $\overline{W} \subset V$, como se quería demostrar. □

Corolario 6.4.3. *Si X es un espacio compacto y Hausdorff, entonces X es localmente compacto.*

Corolario 6.4.4. *Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto. Si $C \subset X$ es un conjunto compacto y U es una vecindad de C, entonces existe un abierto W tal que*

$$C \subset W \subset \overline{W} \subset U$$

y $\overline{W}$ es compacto.

Demostración. Por la compacidad local de X, para cada $x \in C$, podemos encontrar una vecindad W_x de x tal que $\overline{W}_x$ es compacto y $\overline{W}_x \subset V$. Consecuentemente, la familia $\{W_x\}_{x \in C}$ es una cubierta abierta para el compacto C y por lo tanto podemos encontrar una subcubierta finita, digamos $Wx_1, \ldots, W_{x_n}$. Entonces,

$$C \subset \bigcup_{i=1}^{n} W_{x_i} \subset \overline{\bigcup_{i=1}^{n} W_{x_i}} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{W_{x_i}} \subset V.$$

Así, definimos $W = \bigcup_{i=1}^{n} W_{x_i}$. Entonces su cerradura $\overline{W} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{W_{x_i}}$ es compacta al ser unión finita de compactos, y por lo tanto W cumple lo que se quería. □

Proposición 6.4.5. *Sea X un espacio de Hausdorff y $D \subset X$ un subconjunto localmente compacto y denso en X. Entonces D es abierto.*

Demostración. Sea $x \in D$. Entonces existe un abierto U en D, tal que $x \in U$ y la cerradura en D $[U]_D$ es compacta. Como X es de Hausdorff, $[U]_D$ es cerrado en X, por lo que $[U]_D$ coincide con la cerradura $\overline{U}$ en X. Además, existe un abierto W en X, tal que $W \cap D = U$. Por la proposición 3.4.3, tenemos que

$$\overline{U} = \overline{W \cap D} = \overline{W}.$$

Así,

$$x \in W \subset \overline{W} = \overline{U} \subset D.$$

Por lo tanto, D es un subconjunto abierto de X. □

La propiedad de ser un espacio localmente compacto solamente se hereda en algunos subconjuntos, como veremos a continuación.

Teorema 6.4.6. *Sean X un espacio de Hausdorff localmente compacto y $A \subset X$. Entonces A es localmente compacto en cada uno de los siguientes casos:*

(1) Si A es cerrado.
(2) Si A es abierto.
(3) Si A es la intersección de un subconjunto cerrado y un subconjunto abierto.

Demostración.

(1) Supongamos que $a \in A$. Entonces existe una vecindad de a, $U \subset X$, tal que $\overline{U}$ es compacto. Así, $U \cap A$ es una vecindad de a en A. Además, $\overline{U \cap A} \subset \overline{U}$, por lo que $\overline{U \cap A}$ es compacto y por tanto, en virtud del la proposición 6.4.2, A es localmente compacto.

(2) Sea $a \in A$. Entonces A es una vecindad de a y por la proposición 6.4.2 existe una vecindad $U \subset X$ de a, tal que $\overline{U}$ es compacto y

$$\overline{U} \subset A.$$

Así, $U = U \cap A$ es una vecindad de a en A con cerradura compacta. Por lo tanto, A es localmente compacto.

(3) Supongamos que existe un abierto U y un cerrado C, tal que $A = U \cap C$. Por el incisio (1), C es localmente compacto. Ahora notemos que A es un subconjunto abierto en C, por lo que aplicando el inciso (2), podemos concluir que A es localmente compacto.

□

Recíprocamente, tiene lugar la siguiente proposición.

Proposición 6.4.7. *Sean X un espacio de Hausdorff y $A \subset X$ un subconjunto localmente compacto. Entonces A es la intersección de un subconjunto cerrado y un subconjunto abierto en X.*

Demostración. Sea $B = \overline{A}$ la cerradura de A en X. Entonces A es denso en B, y por la proposición 6.4.5 A es abierto en B. Así, $A = B \cap C$ para algún conjunto $C \subset X$ abierto en X. Como B es cerrado en X y C es abierto en X, la representación $A = B \cap C$ es la buscada. $\square$

A diferencia de la compacidad, la compacidad local no se preserva bajo funciones continuas. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 6.4.5. Sean $\mathbb{Q}$ el conjunto de los números racionales, τ_e la topología inducida de la recta real, y τ_d la topología discreta. Entonces la función identidad

$$Id : (\mathbb{Q}, \tau_d) \to (\mathbb{Q}, \tau_e)$$

es una función continua. Además, $(\mathbb{Q}, \tau_d)$ es un espacio localmente compacto, pero $(\mathbb{Q}, \tau_e)$ no lo es, según el Ejemplo 6.4.2.

Sin embargo, hay algunas funciones continuas que sí preservan la compacidad local, como lo veremos en la siguiente proposición.

Proposición 6.4.8. *Sean X un espacio localmente compacto y Y un espacio de Hausdorff. Si existe una función $f : X \to Y$ continua, abierta y suprayectiva, entonces Y es localmente compacto.*

Demostración. Sea $y \in Y$. Como f es suprayectiva, existe un punto $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Luego, como X es localmente compacto, existe una vecindad U de x tal que $\overline{U}$ es compacto. Así, debido a que f es una función abierta, $f(U)$ es una vecindad de y. Por otro lado, como f es continua, $f(\overline{U})$ es compacto y como Y es de Hausdorff, $f(\overline{U})$ es cerrado. Así, haciendo nuevamente uso de la continuidad, llegamos a que $f(\overline{U}) = \overline{f(U)}$. Así que

$$y = f(x) \in f(U) \subset \overline{f(U)}$$

Por lo tanto, $\overline{f(U)}$ es compacto, y consecuentemente Y es localmente compacto. $\square$

Teorema 6.4.9. *Si X es un espacio de Hausdorff localmente compacto, entonces X es de Tychonoff.*

Demostración. Evidentemente, $X \in T_1$, por lo que sólo demostraremos que $X \in T_{3\frac{1}{2}}$. Sean A un subconjunto cerrado y $x \in X \setminus A$. Entonces existe una vecindad U de x, tal que $\overline{U}$ es compacto y $\overline{U} \subset X \setminus A$. Como $\overline{U}$ es un espacio compacto de Hausdorff, por el corolario 6.1.9, $\overline{U}$ es normal.

Consideremos los conjuntos cerrados $\{x\}$ y $C = \overline{U} \setminus U$ de $\overline{U}$. Entonces existe una función continua $\lambda : \overline{U} \to [0,1]$ tal que $\lambda(x) = 0$ y $\lambda(C) = \{1\}$. Definamos $f : X \to [0,1]$ por

$$f(y) = \begin{cases} \lambda(y), & \text{si } y \in \overline{U}, \\ 1, & \text{si } y \in X \setminus U. \end{cases}$$

Esta función está bien definida ya que la intersección $\overline{U} \cap (X \setminus U)$ es precisamente C, y $\lambda(C) = 1$. Entonces f es una función continua por ser la unión de dos funciones continuas con dominios cerrados (véanse los ejercicios del capítulo 3). Además, $f(x) = 0$ y $f(A) = 1$. Por lo tanto, X es un espacio de Tychonoff.

$\square$

6.5. Compactaciones

Definición 6.5.1. *Sea X un espacio topológico. Un espacio compacto de Hausdorff cX se llama **compactación de** X si $X \subset cX$ y $\overline{X} = cX$. El conjunto $cX \setminus X$ recibe el nombre de **residuo**.*

Si c_1X y c_2X son dos compactaciones de un espacio topológico X, diremos que $c_1X \succeq c_2X$ si existe una función continua $f : c_1X \to c_2X$ tal que $f(x) = x$, para todo $x \in X$. Por otra parte, diremos que c_1X y c_2X son equivalentes (denotado por $c_1X \sim c_2X$), si existe un homeomorfismo $h : c_1X \to c_2X$ tal que $f(x) = x$, para todo $x \in X$.

Es evidente que $c_1X \sim c_2X$ si y sólo si $c_1X \succeq c_2X$ y $c_2X \succeq c_1X$.

6.5.1. Compactación de Alexsandroff.

Teorema 6.5.2 (Compactación de Alexsandroff). *Sea (X, τ) un espacio localmente compacto de Hausdorff que no es compacto. Entonces existe un espacio compacto de Hausdorff, αX, tal que X es subespacio de αX y $|\alpha X \setminus X| = 1$.*

Además, si X' es otro espacio topológico que cumple estas condiciones, entonces existe un homeomorfismo $f : \alpha X \to X'$ tal que $f(x) = x$ para todo $x \in X$

*El espacio topológico αX recibe el nombre de **compactación de Alexsandroff**.*

Demostración. Denotemos por μ a la topología de X y sea $\{*\}$ un punto que no pertenezca a X.

Definamos

$$\mathcal{B}_* = \{\{*\} \cup (X \setminus K) \mid K \subset X \text{ es compacto } \}.$$

Demostremos que $\tau = \mu \cup \mathcal{B}_*$ es una topología para αX.

1 Claramente $\{\emptyset, \alpha X\} \subset \tau$.
2 Si $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \tau$, y la familia $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ no contiene ningún elemento de $\mathcal{B}_*$, entonces $\bigcup\limits_{\alpha\in A} U_\alpha \in \mu \subset \tau$. Si la familia $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ contiene al menos un elemento de $\mathcal{B}_*$, digamos $\alpha X \setminus K$, entonces

$$C = \alpha X \setminus \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \subset K.$$

De esta forma vemos que C es un cerrado en el compacto K, y por tanto compacto también. Así, $\bigcup\limits_{\alpha\in A} U_\alpha = \alpha X \setminus C \in \mathcal{B}_* \subset \tau$
3 Si U, $V \in \tau$, tendremos que $U \cap V \in \tau$. En efecto, si U, $V \in \mu$, entonces $U \cap V \in \mu$. Si U, $V \in \mathcal{B}_*$, claramente $U \cap V \in \mathcal{B}_*$. Por último, si $U \in \mu$ y $V \in \mathcal{B}_*$, entonces $U \cap V \in \mu$.

Con esto queda demostrado que τ es una topología en αX.

Afirmamos que $(\alpha X, \tau)$ es el espacio topológico buscado. Es claro que $|\alpha X \setminus X| = 1$. Además la topología del subespacio en X coincide con la topología original de X. Por otro lado, es evidente que X es denso en αX, ya que X no es compacto.

Demostremos que αX es compacto. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta para αX. Entonces existe $U_0 \in \mathcal{U}$ tal que $* \in U_0$. Así, $X \setminus U_0$ es compacto, por lo que puede ser cubierto por un número finito de elementos de $\mathcal{U}$, digamos $\{U_1, \ldots U_n\}$. Así, $\{U_0, U_1, \ldots U_n\}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{U}$, por lo que podemos conluir que αX es compacto.

Nos falta demostrar que $\alpha X \in T_2$. En virtud de que $X \in T_2$ y X es abierto en αX, es suficiente mostrar dos vecindades disjuntas de $*$ y de x, para todo $x \in X$. Por ser X localmente compacto, existe una vecindad U de x, tal que $\overline{U}$ es compacto. Sea

$$V = \{*\} \cup (X \setminus \overline{U}).$$

Entonces V es una vecindad de $*$ tal que $U \cap V = \emptyset$. Por lo tanto $\alpha X \in T_2$. Así, αX es la compactación buscada.

Ahora supongamos que existe una compactación X' de X, tal que X' es de Hausdorff y $|X' \setminus X| = 1$. Entonces podemos expresar a Y de la siguiente forma

$$X' = X \cup \{\star\},$$

donde $\star$ es un punto que no pertenece a X. Para demostrar que αX y X' son equivalentes, necesitamos exhibir un homeomorfismo $h : \alpha X \longrightarrow X'$, tal que $h(x) = x$, para cualquier $x \in X$.

Propongamos $h : \alpha X \longrightarrow X'$ dada por

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in X \\ \star & \text{si } z = *. \end{cases}$$

Evidentemente, h es una función biyectiva. Para demostrar que es una función continua, consideremos un conjunto $U \subset X'$ abierto en X'.

Si $\star \notin U$, entonces U es abierto en X, por lo que $h^{-1}(U) = U$ es abierto en αX. Por otro lado, si $\star \in U$, entonces $K = X' \setminus U$ es cerrado en X'. Como X' es compacto, K también lo es. Además, $X' \setminus U \subset X$, por lo que $h^{-1}(X' \setminus U) = X \setminus U = K$. Así,

$$h^{-1}(U) = \alpha X \setminus h^{-1}(X' \setminus U) = \alpha X \setminus (X' \setminus U) = \{*\} \cup (X \setminus K).$$

De esta manera, podemos concluir que $h^{-1}(U)$ es abierto en X para todo abierto U de X'. Por lo tanto h es una función continua y biyectiva de un espacio compacto en un espacio de Hausdorff. Así, en virtud del teorema 6.1.13, h es un homeomorfismo. $\square$

Ejemplos 6.5.1.

1. Si $X = [0, 1)$, entonces $\alpha X = [0, 1]$.
2. Sea $X = (0, 1)$, entonces $\alpha X = \mathbb{S}^1$.

Como consecuencia inmediata de la proposición 6.4.5, obtenemos la siguiente proposición:

Proposición 6.5.3. *Si X es un espacio de Hausdorff localmente compacto y cX es una compactación de X, entonces X es un subconjunto abierto de cX.*

Proposición 6.5.4. *Si X es un espacio localmente compacto de Hausdorff, entonces cualquier compactación de Hausdorff cX de X, cumple que $cX \succeq \alpha X$.*

Demostración. Sea $\alpha X = X \cup \{*\}$ la compactación de Alexsandroff de X. Definamos $f : cX \to \alpha X$ por

$$f(z) = \begin{cases} *, & \text{si } z \notin X, \\ z, & \text{si } z \in X. \end{cases} \tag{19}$$

Para completar la demostración, falta demostrar que f es continua. Sea U un conjunto abierto en αX. Si $* \notin U$ entonces

$$f^{-1}(U) = U \subset X.$$

Como U es abierto en X, y X es abierto en cX, entonces U es abierto en cX. Por otro lado, si $* \in U$, $\alpha X \setminus U$ es un subconjunto compacto de X. Se tiene que $f^{-1}(\alpha X \setminus U) = \alpha X \setminus U$ Asi,

$$f^{-1}(U) = cX \setminus f^{-1}(\alpha X \setminus U) = cX \setminus (\alpha X \setminus U).$$

Pero cX es de Hausdorff, entonces el compacto $\alpha X \setminus U$ es cerrado en cX, por lo que $f^{-1}(U) = cX \setminus (\alpha X \setminus U)$ es abierto en cX, como se quería demostrar. $\square$

6.5.2. Compactación de Stone-$\check{C}$ech. Anteriormente hemos hablado de la compactación de Alexsandroff, la cual es una compactación minimal y fácil de obtener. A continuación presentaremos la compactación de Stone-$\check{C}$ech, la cual resulta ser una compactación maximal respecto a la relación $\succeq$.

Denotemos por $\mathbb{I}$ al intervalo $[0, 1]$ con la topología inducida de la recta real. Por otro lado, para un espacio topológico X, llamaremos $\mathcal{C}(X, \mathbb{I})$ al conjunto de todas las funciones continuas $f : X \to \mathbb{I}$.

Sea X cualquier espacio de Tychonoff. Consideremos el producto

$$\prod_{f \in \mathcal{C}(X,\mathbb{I})} \mathbb{I}_f$$

donde $\mathbb{I}_f = \mathbb{I}$ para toda $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{I})$. Sea

$$\varphi : X \to \prod_{f \in \mathcal{C}(X,\mathbb{I})} \mathbb{I}_f$$

dada por

$$\varphi(x)_f = f(x) \text{ para todo } f \in C(X, \mathbb{I}). \tag{20}$$

Entonces, según el teorema 5.2.5, φ es un encaje topológico.

Teorema 6.5.5. *Sea X un espacio de Tychonoff. Consideremos el encaje $\varphi : X \hookrightarrow \prod_{f \in \mathcal{C}(X,\mathbb{I})} \mathbb{I}_f$ definido en* (20). Entonces la cerradura $\beta X = \overline{\varphi(X)}$ es una compactación de $\varphi(X)$. Identificando a X con $\varphi(X)$ por medio de φ, el espacio βX recibe el nombre de **compactación de Stone-$\check{C}$ech** de X.

Demostración. Como $\mathbb{I}_f$ es compacto para cualquier $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{I})$, aplicando el Teorema de Tychonoff, tenemos que $\prod_{f \in \mathcal{C}(X,\mathbb{I})} \mathbb{I}_f$ es un espacio compacto. Entonces βX es un subconjunto cerrado de un espacio compacto, y en virtud del teorema 6.1.4, βX es compacto. Por otra parte, X es homemorfo a $\varphi(X)$, entonces la construcción de βX nos garantiza que $X \cong \varphi(X)$ es denso en βX. Por lo tanto βX es una compactación de X, como se quería demostrar. $\square$

A continuación, demostraremos la siguiente propiedad central de la compactación de Stone-Čech.

Teorema 6.5.6. *Sea X un espacio de Tychonoff y B un espacio compacto de Hausdorff. Para cualquier función continua $g : X \to B$, existe otra función continua $g^* : \beta X \to B$, tal que $g^* \circ \varphi = g$.*

Demostración. Como B es un espacio compacto de Hausdorff, es de Tychonoff. Así, según la demostración del teorema 5.2.5, podemos encajar B en $\prod_{h \in \mathcal{C}(B,\mathbb{I})} \mathbb{I}_h$, mediante la función producto diagonal

$$\psi : B \to \prod_{h \in \mathcal{C}(B,\mathbb{I})} \mathbb{I}_h$$

dada por

$$\psi(y)_h = h(y), \text{ para toda } h \in \mathcal{C}(B, \mathbb{I}).$$

Como ψ es continua y B compacto, $\psi(B)$ es un subconjunto compacto del espacio de Tychonoff $\prod_{h \in \mathcal{C}(B,\mathbb{I})} \mathbb{I}_h$. Entonces, $\psi(B)$ es cerrado.

Por otro lado, notemos que para cualquier $h \in \mathcal{C}(B, \mathbb{I})$, la función $h \circ g : X \to \mathbb{I}$ pertenece a $\mathcal{C}(X, \mathbb{I})$. Sea

$$G : \prod_{f \in \mathcal{C}(X,\mathbb{I})} \mathbb{I}_f \to \prod_{h \in \mathcal{C}(B,\mathbb{I})} \mathbb{I}_h$$

dada por

$$G(t)_h = t_{h \circ g}, \text{ para todo } t = (t_f) \in \prod_{f \in C(X,\mathbb{I})} \mathbb{I}_f$$

Si $\pi_h : \prod_{h \in \mathcal{C}(B,\mathbb{I})} \mathbb{I}_h \to \mathbb{I}_h$ es la proyeción en la $h-$ésima coordenada, entonces es fácil ver que

$$\pi_h \circ G = \pi_{h \circ g}.$$

Así, $\pi_h \circ G$ es una función continua para toda $h \in \mathcal{C}(B, \mathbb{I})$. Por lo tanto, en virtud del teorema 4.5.7, G es una función continua.

Notemos que para cualquier $x \in X$,

$$G(\varphi(x))_h = \varphi(x)_{h \circ g} = h \circ g(x) = \psi(g(x))_h,$$

por lo que $G \circ \varphi = \psi \circ g$.

Observemos que $G(\varphi(X)) \subset \psi(B)$. Entonces, aplicando la continuidad de G y recordando que $\psi(B)$ es cerrado, obtendremos

$$G(\beta X) = G(\overline{\varphi(X)}) \subset \overline{G(\varphi(X))} \subset \overline{\psi(B)} = \psi(B).$$

Como ψ es un encaje, existe la función inversa $\psi^{-1} : \psi(B) \to B$. Definamos $g^* : \beta X \to B$ como $g^* = \psi^{-1} \circ G\mid_{\beta X}$. Entonces g^* es continua por ser composición de funciones continuas. Por último, notemos que para cualquier $x \in X$,

$$(g^* \circ \varphi)(x) = \psi^{-1}(G\,|_{\beta X}\,(\varphi(x))) = \psi^{-1}(\psi(g(x))) = g(x).$$

Por lo tanto g^* es la función buscada. □

Corolario 6.5.7. *Sea X un espacio de Tychonoff. Entonces, para cualquier función continua $f : X \to \mathbb{I}$, existe una extensión continua $f^* : \beta X \to \mathbb{I}$.*

Corolario 6.5.8. *Sea X un espacio de Tychonoff y βX su compactación de Stone-Čech. Si cX es una compactación cualquiera de X, entonces $\beta X \succeq cX$.*

Demostración. Como cX es una compactación de X, podemos suponer que $X \subset cX$ como subespacio denso. Por el teorema 6.5.6, existe $c^* : \beta X \to cX$, continua, tal que $c^*(x) = x$ para toda $x \in X$. Entonces $\beta X \succeq cX$, como se quería demostrar. □

La propiedad de maximalidad exhibida en el corolario anterior es de hecho otra caracterización de la compactación de Stone-Čech, como veremos enseguida.

Proposición 6.5.9. *Si bX es una compactación para X tal que para cualquier otra compactación cX de X se tiene $bX \succeq cX$, entonces bX es equivalente a βX*

Demostración. En particular tendremos que $bX \succeq \beta X$, y como además sabemos que $\beta X \succeq bX$, podemos concluir que las compactaciones son equivalentes. □

Las compactaciones de Stone-Čech, son muy difíciles de ver explícitamente. Sin embargo, los teoremas que hemos demostrado nos dan criterios para determinar cuando una compactación particular no es compactación de Stone-Čech, como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.5.2. Sea $X = (0, 1]$, entonces $[0, 1] \neq \beta X$. En efecto, la función $f : X \to [-1, 1]$, dada por $f(x) = \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$, no se puede extender continuamente a $[0, 1]$. Así, por el corolario 6.5.7, $[0, 1]$ no es equivalente a βX como compactación de X.

6.6. Ejercicios del capítulo

1. Da un ejemplo de un espacio topológico que contenga un subespacio compacto y no cerrado.

2. Sea S una sucesión convergente en un espacio X. Probar que S junto con su punto límite, es un espacio compacto.
3. ¿Existe una biyección continua de un espacio compacto de Hausdorff sobre el espacio de los números racionales?
4. Demuestra que cualquier subespacio compacto de la línea de Sorgenfrey es numerable (sugerencia: recuerda que cualquier función continua y biyectiva de un espacio compacto en un espacio de Hausdorff es un homeomorfismo).
5. Probar que cualquier subespacio compacto de la recta de Sorgenfrey tiene base numerable.
6. Sea X un espacio de Hausdorff y U un subconjunto abierto de X. Demostrar que si una familia $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ de subconjuntos cerrados de X contiene al menos un elemento compacto, (en particular, si X es compacto) y si $\bigcap\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} F_\alpha \subset U$, entonces existe un subconjunto finito $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\} \subset \mathcal{A}$, tal que $\bigcap_{i=1}^n F_{\alpha_i} \subset U$.
7. Sean F y G dos subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$. Demostrar que los siguientes conjuntos son compactos:
   a) $F + G = \{x + y \mid x \in F,\ y \in G\}$.
   b) $F \cdot G = \{x \cdot y \mid x \in F,\ y \in G\}$.
8. Sea X un espacio compacto. Demostrar que todo subconjunto infinito tiene un punto de acumulación.
9. Sean X y Y dos espacios compactos de Hausdorff. Probar que una función $f : X \to Y$ es continua si y solo si la gráfica $\{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ es cerrada en $X \times Y$.
10. Sea X un conjunto infinito. Demuestra que X con la topología cofinita es un espacio compacto ¿Será cierto si X es no numerable y tiene la topología conumerable?
11. ¿Es posible encontrar en la recta real una familia no numerable de subconjuntos no numerables, compactos y ajenos dos a dos?
12. Sea $\mathbb{I}$ el conjunto de los números irracionales con la topología inducida de $\mathbb{R}$ ¿Es posible encontrar una familia no numerable de subconjuntos de $\mathbb{I}$, no numerables, compactos y ajenos dos a dos?
13. Demostrar que X es numerablemente compacto si y solo si cada función continua $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es cerrada.
14. Si X es un espacio numerablemente compacto, mostrar que cualquier biyección continua de X sobre un espacio métrico Y, es un homeomorfismo.
15. Probar que el producto de un espacio compacto con un espacio numerablemente compacto es numerablemente compacto.
16. Sean (X, d) un espacio métrico y $\rho : 2^X \times 2^X \to \mathbb{R}$ dada por

$$\rho(A, B) = \text{ínf}\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Si A y B son subconjuntos ajenos y compactos de X, probar que $\rho(A, B) > 0$.

17. En el ejercicio anterior ¿es esencial que A y B sean compactos? Argumenta tu respuesta.
18. Da un ejemplo de un espacio topológico que sea localmente compacto y Hausdorff, pero no T_4.
19. Da un ejemplo de un espacio T_4 que no sea hereditariamente T_4
20. Demuestre que el producto finito de espacios localmente compactos es localmente compacto.
21. Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una familia de espacios toplógicos localmente compactos. Demuestra que $\prod\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$ es localmente compacto si y solo si X_α es compacto para toda $\alpha \in \mathcal{A}$, salvo para un número finito de índices.
22. Sean X y Y espacios completamente regulares. Si
$$X \subset Y \subset \beta X,$$
entonces βY es homeomorfo a βX.
23. Sean $\{X_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ una familia de espacios topológicos y $X = \prod\limits_{s\in\mathcal{S}} X_s$. Considera $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua y denota por $\pi_s : X \to X_s$ la proyección en la s-ésima coordenada. Demuestra que para todo $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto finito $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ tal que para todo par de puntos $x, y \in X$ tal que $\pi_s(x) = \pi_s(y)$ para todo $s \in \mathcal{S}_0$, se cumpla que
$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$
24. Sea X un espacio compacto de Hausdorff y $f : X \to X$ una función continua. Demuestra que existe un conjunto cerrado no vacío $A \subset X$, tal que $f(A) = A$.
25. Sea (X, d) un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una función.
    a) Si f es una isometría (es decir, si $d(x, y) = d(f(x), f(y))$), demuestra que f es suprayectiva.
    b) Si $d(f(x), f(y)) \geq d(x, y)$ para todo par de puntos $x, y \in X$, demuestra que f es una isometría.
    c) Si $d(x, y) \geq d(f(x), f(y))$ para todo par de puntos $x, y \in X$ y f es suprayectiva, demuestra que f es una isometría.
26. Sea (X, d) un espacio métrico completo y $f : X \to X$ una función. Supongamos que existe $\lambda \in (0, 1)$ tal que para todo $x, y \in X$, se cumple que $d(f(x), f(y) \leq \lambda d(x, y)$. Demuestra que existe $x_0 \in X$, tal que $f(x_0) = x_0$.
27. Construye un ejemplo de un espacio X y dos compactaciones aX y bX que sean homeomorfas mas no equivalentes.

Capítulo 7

Conexidad

La conexidad es una propiedad topológica completamente distinta a todas las estudiadas anteriormente. La conexidad no implica ni es implicada por ninguno de los teoremas anteriores. Sin embargo, como veremos en los ejemplos de este capítulo la conexidad se convierte en una poderosa herramienta para el estudio de los espacios topológicos.

7.1. Espacios Conexos

Antes de definir qué es un espacio conexo, definiremos qué es un espacio disconexo.

Definición 7.1.1. *Sea X un espacio topológico y U y V dos abiertos de X. Se dice que la pareja (U, V) es una* ***separación o disconexión*** *de X, si se satisfacen las siguientes propiedades,*

1. $U \neq \emptyset$ *y* $V \neq \emptyset$,
2. $U \cap V = \emptyset$,
3. $X = U \cup V$.

Diremos que un espacio topológico X es ***disconexo*** *si existe una separación de X.*

Definición 7.1.2. *Se dice que un espacio topológico X es* ***conexo*** *si no existe ninguna separación de X.*

Un subconjunto A de un espacio topológico X se llama conexo, si el espacio A con la topología inducida de X es conexo.

Ejemplo 7.1.1. El espacio de los números racionales con la topología inducida de la recta real es disconexo. En efecto, los abiertos $U = (-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$ y $V = (\sqrt{2}, \infty) \cap \mathbb{Q}$, constituyen una separación de $\mathbb{Q}$.

Teorema 7.1.3. *La recta real es un espacio conexo.*

Demostración. Supongamos que existen dos abiertos U y V en $\mathbb{R}$, tales que el par (U, V) es una separación de $\mathbb{R}$. Sean $u \in U$ y $v \in V$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $u < v$. Consideremos el conjunto

$$C = \{x \in U \mid x < v\}.$$

Notemos que C está acotado superiormente y es no vacío, ya que v es una cota superior y $u \in C$. Por la propiedad del supremo, existe un número $s \in \mathbb{R}$ tal que

$$s = \sup C.$$

Entonces $s \in U \cup V$. Supongamos que $s \in U$. Como U es abierto existe $\varepsilon > 0$ tal que $(s-\varepsilon, s+\varepsilon) \subset U$. Recordemos que U y V son ajenos, por lo que $v \notin (s-\varepsilon, s+\varepsilon)$. Además, como v es cota superior de C, $s \leq v$. Por lo tanto, $s < s+\frac{\varepsilon}{2} < v$, y $s+\frac{\varepsilon}{2} \in U$. Entonces $s+\frac{\varepsilon}{2} \in C$ y $s < s+\frac{\varepsilon}{2}$, lo cual contradice el hecho que s sea el supremo de C. Esta contradicción nos permite suponer que $s \in V$.

Nuevamente, como V es abierto, existe $\eta > 0$ tal que $(s-\eta, s+\eta) \subset V$. Además, como U y V son ajenos, el punto $s-\frac{\eta}{2}$ cumple $x < s-\frac{\eta}{2}$, para todo $x \in C$. Por lo tanto, s no podría ser el supremo de C. Esta contradicción viene de suponer que existe una separación para $\mathbb{R}$. Por lo tanto $\mathbb{R}$ es conexo. $\square$

Las siguientes proposiciones nos brindan algunas caracterizaciones de la noción de conexidad cuya utilidad se hará patente más adelante.

Teorema 7.1.4. *Un espacio topológico X es conexo si y sólo si los únicos subconjuntos simultáneamente abiertos y cerrados son X y $\emptyset$.*

Demostración. Si X es conexo y $A \subset X$ es abierto y cerrado, necesariamente $A \in \{X, \emptyset\}$, pues de lo contrario A y $X \setminus A$ formarían una separación de X. Si X no es conexo, entonces existe una separación (U, V) de X, y de la definición de disconexión, se sigue inmediatamente que U es abierto, cerrado, no vacío y distinto de X. $\square$

Teorema 7.1.5. *Sea X un espacio topológico. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes.*

1. *X es conexo.*
2. *Si D es un espacio discreto arbitrario, entonces toda función continua, $f : X \to D$, es constante.*
3. *Toda función continua $f : X \to \{0,1\}$ es constante.*

Demostración.

$(1 \Rightarrow 2)$ Sea $f : X \to D$ una función continua. Sean $x \in X$ y $d = f(x)$. Como D es un espacio discreto, entonces $\{d\}$ es a la vez abierto y cerrado. Por continuidad, $f^{-1}(d)$ es abierto y cerrado en X. Además, $x \in f^{-1}(d)$, por lo que $f^{-1}(d) \neq \emptyset$. Por el teorema anterior, el único conjunto abierto y cerrado no vacío es X. Entonces $f^{-1}(d) = X$, lo cual demuestra que f es constante.

($2 \Rightarrow 3$) Es evidente, ya que como el espacio $\{0,1\}$ es discreto, por (2) toda función continua $f : X \to \{0,1\}$ es constante

($3 \Rightarrow 1$) Contrapositivamente, si existe una función continua y no constante $f : X \to \{0,1\}$, entonces los abiertos $V = f^{-1}\{0\}$ y $U = f^{-1}\{1\}$ constituyen una separación de X. □

El siguiente teorema nos brinda otra importante caracterización de la conexidad.

Teorema 7.1.6 (Teorema de Boltzano)**.** *Un espacio topológico X es conexo si y sólo si todo función continua $f : X \to \mathbb{R}$, tal que $\{a, b\} \subset f(X)$, cumple que $[a, b] \subset f(X)$.*

Demostración. Demostremos primero la parte "sólo si", por contrapositiva. Supongamos que existe una función continua $f : X \to \mathbb{R}$, tal que $\{a, b\} \subset f(X)$, pero $[a, b]$ no esté contenido en $f(X)$. Entonces existe $x_1 \in X$ y $x_2 \in X$, tal que $f(x_1) = a$ y $f(x_2) = b$. Sea $c \in [a, b] \setminus f(X)$, definamos $g : \mathbb{R} \setminus \{c\} \to \{0,1\}$ por

$$g(y) = \begin{cases} 0, & \text{si } y < c, \\ 1, & \text{si } y > c. \end{cases}$$

Claramente g está bien definida y es continua. Consideremos ahora la función $h = g \circ f : X \to \{0,1\}$. Entonces h es una función continua y no es constante, ya que $h(x_1) = 0$ y $h(x_2) = 1$. Así, existe una función continua y no constante de X al $\{0,1\}$, por lo que, en virtud del teorema anterior, X es disconexo. Probemos ahora, contrapositivamente, la parte "sí". Supongamos

que X es disconexo, entonces existe una separación (U, V) de X. Definamos $f : X \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in U, \\ 1, & \text{si } x \in V. \end{cases}$$

Es claro que f está bien definida en todo X y es continua por la proposición 4.1.10. De esta manera, hemos encontrado una función continua de X en $\mathbb{R}$ tal que $0, 1 \subset f(X)$ pero $[0, 1]$ no está contenido en $f(X)$,con lo que el teorema queda demostrado.

□

Como veremos en la siguiente proposición, la conexidad es una propiedad que se preserva bajo funciones continuas.

Teorema 7.1.7. *Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Si X es conexo, entonces Y es conexo.*

Demostración. Sea $g : Y \to \{0,1\}$ una función continua. En virtud del teorema 7.1.5 basta demostrar que g es constante.

Considermos la función $h = g \circ f : X \to \{0,1\}$. Como X es conexo, por el teorema 7.1.5, h es constante y por lo tanto, g es constante. $\square$

Proposición 7.1.8. *Sea X un espacio topológico. Si A es un subconjunto conexo B es un subconjunto de X que satisface $A \subset B \subset \overline{A}$, entonces B es conexo.*

Demostración. Sea $f : B \to \{0,1\}$ una función continua. En virtud del teorema 7.1.5, basta demostrar que f es constante. Consideremos: $f|_A : A \to \{0,1\}$. Como $f|_A$ es continua y A es conexo, por el teorema 7.1.5, $f|_A$ es constante. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $f(A) = \{0\}$. Notemos que A es denso en B, entonces, por la continuidad de f,

$$f(B) = f(\overline{A}^B) \subset \overline{f(A)} = \overline{\{0\}} = \{0\}.$$

Por lo tanto, f es una función constante, como se quería demostrar. $\square$

Corolario 7.1.9. *Sea A un subconjunto conexo de un espacio topológico X. Entonces $\overline{A}$ es conexo.*

Ejemplo 7.1.2. Un subespacio S de la recta real es conexo si y sólo si S es un intervalo. Aquí entendemos por intervalo cualquier subconjunto de la forma (a,b), $(a,b]$, $[a,b]$, $[a,b)$, (a,∞), $[a,\infty)$, $(-\infty,b)$ $(-\infty,b]$ ó $(-\infty,\infty)$.

Demostración. Primero supongamos que existe un conjunto S conexo, tal que no es un intervalo. Entonces existe un punto $\xi \in \mathbb{R}\backslash S$, y dos puntos a y b en S, tal que $a < \xi < b$. Así, $U = (-\infty,\xi) \cap S$ y $V = (\xi,\infty) \cap S$ constituyen una separación de S, por lo tanto S es disconexo. Esta contradicción nos permite concluir que cualquier subconjunto conexo de $\mathbb{R}$ es un intervalo.

Ahora supongamos que S es un intervalo. Si $S = (a,b)$, $S = (-\infty,b)$ ó $S = (a,\infty)$, entonces S es homeomorfo a $\mathbb{R}$. Así, se sigue del ejemplo 7.1.3 y del teorema 7.1.7 que S es conexo. Por otro lado, si $S = [a,b]$, $S = [a,b)$, $S = (a,b]$, $[a,\infty)$ ó $(-\infty,b]$, en virtud de la proposición 7.1.8 podemos concluir que S es conexo. $\square$

Proposición 7.1.10. *Sea C un subconjunto conexo de un espacio topológico X. Si U es un subconjunto abierto y cerrado de X, tal que $U \cap C \neq \emptyset$, entonces $C \subset U$.*

DEMOSTRACIÓN. Como U es abierto y cerrado en X, tenemos que $U \cap C$ es un conjunto abierto y cerrado en C. Pero C es conexo, por lo que en virtud del teorema 7.1.4, $C = U \cap C$. Así, $C \subset U$. $\square$

Teorema 7.1.11. *Sean X un espacio topológico y $\{B_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una familia de subconjuntos conexos de X. Si $\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} B_\alpha \neq \emptyset$, entonces $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} B_\alpha$ es conexo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f : \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} B_\alpha \to \{0,1\}$ una función continua. Basta demostrar que f es constante.

Consideremos $x \in \bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} B_\alpha$ y supongamos sin pérdida de generalidad que $f(x) = 0$. Como B_α es conexo para toda $\alpha \in \mathcal{A}$, $f|_{B_\alpha}$ es constante, de hecho la constante 0. Así, $f(y) = 0$ para toda $y \in \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} B_\alpha$. Por lo tanto, f es constante. $\square$

Corolario 7.1.12. *Si cualquier par de puntos $\{x,y\}$ de un espacio topológico X está contenido en un conjunto conexo $B \subset X$, entonces X es conexo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in X$. Entonces para cualquier $y \in X$, existe un conjunto conexo B_y tal que $\{x,y\} \subset B_y$. Así, $x \in \bigcap_{y\in X} B_y$. De esta forma, podemos aplicar el teorema 7.1.11, para concluir que $\bigcup_{y\in X} B_y$ es conexo. Pero por la hipótesis

$$X = \bigcup_{y\in Y} B_y,$$

y por lo tanto X es conexo. $\square$

Proposición 7.1.13. *Sean X un espacio topológico y $\{C_i\}_{i=1}^n$ una familia de conjuntos conexos. Si para cada $i \in \{1,\ldots,n-1\}$, $C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset$, entonces la unión $\bigcup_{i=1}^n C_i$ es conexo.*

DEMOSTRACIÓN. Por inducción sobre n. Si $n = 1$, entonces $\bigcup_{i=1}^n C_i = C_1$, el cual es un conjunto conexo. Supongamos que para toda $k < n$, $\bigcup_{i=1}^k C_i$ es un conjunto conexo. Hagamos $B = \bigcup_{i=1}^{n-1} C_i$. Entonces, por hipótesis de inducción, B es conexo. Además, por hipótesis $C_{n-1} \cap C_n \neq \emptyset$, y consecuentemente $B \cap C_n \neq \emptyset$. Así, aplicando el teorema 7.1.11, podemos concluir que

$$\bigcup_{i=1}^n C_i = B \cup C_n$$

es un conjunto conexo. $\square$

Corolario 7.1.14. *Sea X un espacio topológico. Supongamos que para cualquier par de puntos x y y de X, existe una colección finita de conjuntos conexos, $\{C_1, \dots C_n\}$, tal que $C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset$ y de manera que $x \in C_1$ y $y \in C_n$. Entonces X es conexo.*

Demostración. Sean x y y dos puntos arbitrarios de X. Por hipótesis, existe una familia finita de conjuntos conexos $\{C_1, \dots, C_n\}$, tales que para toda $i \in \{1, \dots, n-1\}$, se tiene $C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset$. Por la proposición 7.1.13, el conjunto $B = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ es conexo. Entonces B es un conjunto conexo que contiene a x y a y. Aplicando el corolario 7.1.12, podemos concluir que X es conexo. $\square$

Definición 7.1.15. *Sea $x_0 \in X$, y $\{C_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ la familia de todos los subconjuntos conexos, $C_\alpha \subset X$, tales que $x_0 \in C_\alpha$.*

El conjunto

$$C(x_0) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} C_\alpha$$

*se llama **componente conexa de** X que contiene al punto x_0.*

Se sigue del teorema 7.1.11 y de la definición 7.1.15, que la componente conexa de cualquier punto x de un espacio topológico X, es un conjunto conexo. Más aún, $C(x_0)$ es el conjunto conexo más grande que contiene a x_0.

Además, notemos que si x y y son puntos de un espacio topológico X, entonces

$$C(x) = C(y) \quad \text{o} \quad C(x) \cap C(y) = \emptyset.$$

En efecto, si $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset$, por el teorema 7.1.11, $C(x) \cup C(y)$ sería conexo. Entonces, por la definición 7.1.15, $C(x) \cup C(y) \subset C(x)$, lo cual implica que $C(y) \subset C(x)$. Análogamente, $C(x) \subset C(y)$, y por lo tanto $C(x) = C(y)$.

Teorema 7.1.16. *Cualquier componente conexa C de un espacio topológico X es un subconjunto cerrado.*

Demostración. Sea C una componente conexa de X. Entonces $C = C(x)$ para algún punto $x \in X$. Pero C es un conjunto conexo, y por lo que, en virtud del corolario 7.1.9, la cerradura $\overline{C}$ es un conjunto conexo que contine a x. Así, $\overline{C} \subset C$, y por lo tanto C es cerrado. $\square$

Definición 7.1.17. *Un espacio topológico se llama **totalmente disconexo** si para todo $x \in X$ se tiene $C(x) = \{x\}$.*

Observemos que cualquier espacio discreto es totalmente disconexo, sin embargo la afirmación recíproca no es cierta, como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.1.3. El conjunto de los números racionales con la topología heredada de la recta real es un espacio totalmente disconexo. En efecto, consideremos $C \subset \mathbb{Q}$ un subconjunto con más de dos puntos. Entonces, podemos escoger $a, b \in C$ dos puntos distintos. Supongamos sin pérdida de generalidad que $a < b$. Entonces, por la densidad de los números irracionales en $\mathbb{R}$, existe un número $\zeta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, tal que

$$a < \zeta < b.$$

Sea $U = (\infty, \zeta) \cap C$ y $V = (\zeta, \infty) \cap C$. Entonces U y V constituyen una separación del conjunto C, lo cual muestra que C es disconexo. Por lo tanto, las componentes conexas de $\mathbb{Q}$ solo pueden tener un punto.

Teorema 7.1.18. *Sean X y Y dos espacios topológicos conexos. Entonces $X \times Y$ es conexo.*

Demostración. Sea $f : X \times Y \to \{0, 1\}$ cualquier función continua. Demostremos que f es constante. Sean $x = (x_1, x_2)$ y $y = (y_1, y_2)$ dos puntos arbitrarios de $X \times Y$. Para nuestros propósitos, basta demostrar que $f(x) = f(y)$. Notemos que $X \times \{x_2\}$ es homeomorfo a X. Así, $X \times \{x_2\}$ es conexo y por lo tanto, $f|_{X\times\{x_2\}}$ es constante. Consecuentemente,

$$f(x_1, x_2) = f(y_1, x_2).$$

Análogamente, $\{y_1\} \times Y$ es conexo, por lo que, $f|_{\{y_1\}\times Y}$ es constante. Así,

$$f(y_1, x_2) = f(y_1, y_2).$$

Entonces $f(x) = f(y_1, x_2) = f(y)$, por lo que f es constante, como se quería demostrar. □

Corolario 7.1.19. *Si $\{X_i\}_{i=1}^n$ es una familia finita de espacios conexos, entonces $\prod_{i=1}^{n} X_i$ es conexo.*

Ejemplo 7.1.4. El espacio euclideano $\mathbb{R}^n$ es conexo.

Teorema 7.1.20. *Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una familia cualquiera de espacios topológicos conexos. Entonces el producto $X = \prod\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$ es conexo si y sólo si X_α es conexo para todo $\alpha \in \mathcal{A}$.*

Demostración. Supongamos que X es conexo. Entonces, por el teorema 7.1.7, para todo $\alpha \in \mathcal{A}$, $X_\alpha = \pi_\alpha(X)$ es conexo.

Ahora supongamos que X_α es conexo para todo $\alpha \in \mathcal{A}$. Sea $\mathcal{F}$ la familia de todos los subconjuntos finitos de $\mathcal{A}$. Entonces, por el corolario **??** para cada $F \in \mathcal{F}$, el producto $\prod\limits_{\alpha\in F} X_\alpha$ es conexo. Sea $x = \{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}} \in X$ un punto fijo. Así, por el corolario 7.1.19, para cada $F \in \mathcal{F}$,

$$Y_F = \prod_{\alpha\in F} X_\alpha \times \prod_{\alpha\in\mathcal{A}\setminus F} \{x_\alpha\} \subset X$$

es conexo. Además, observemos que $x \in \bigcap\limits_{F\in\mathcal{F}} Y_F$, por lo que podemos aplicar el teorema 7.1.11 para concluir que $Y = \bigcup\limits_{F\in\mathcal{F}} Y_F$ es conexo. En virtud del corolario 7.1.8, $\overline{Y}$ es un subconjunto conexo de X. Para terminar la demostración, probaremos que $\overline{Y} = X$. Supongamos que no. Entonces $X \setminus \overline{Y}$ es un abierto no vacío de X. Consideremos un abierto básico $W = \langle W_{\alpha_1} \dots W_{\alpha_n}\rangle$ de X tal que

$$W \subset X \setminus \overline{Y}.$$

Sea $F_0 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, escojamos un punto $y_i \in W_{\alpha_i} \subset X_{\alpha_i}$. Construyamos el punto $y = \{y_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}} \in X$, en donde $y_\alpha = y_{\alpha_i}$, si $\alpha = \alpha_i$, y $y_\alpha = x_\alpha$, si $\alpha \notin F_0$. Así, $y \in W \subset X \setminus \overline{Y}$. Entonces $y \in Y_{F_0} \subset Y$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $X = \overline{Y}$, como se quería demostrar. □

7.2. Conexidad por trayectorias

Definición 7.2.1. *Sea X un espacio topológico y x y y dos puntos en X. Una* ***trayectoria*** *entre x y y es una función continua $f : [0, 1] \to X$, tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$. En este caso, los puntos x y y reciben el nombre de* ***extremos de la trayectoria****, más precisamente x se llama el inicio y y el fin de la trayectoria.*

Diremos que el espacio topológico X es ***conexo por trayectorias*** *si para cualquier par de puntos x y y de X, existe una trayectoria entre ellos.*

Ejemplo 7.2.1. La recta real es conexa por trayectorias. En efecto, para cualesquiera dos puntos a y b en $\mathbb{R}$, la función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) = tb + (1 - t)a,$$

define una trayectoria entre a y b.

Ejemplo 7.2.2. En $\mathbb{R}^n$ cualquier subconjunto convexo K es un espacio conexo por trayectorias. Recordemos que un conjunto K es convexo, si para cualquier par de puntos a y b de K, el segmento

$$T = \{x = a + t(b - a) \mid t \in [0, 1]\}$$

está contenido en K.

En efecto, sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo. Consideremos $a, b \in K$. Entonces, $\alpha : [0, 1] \to K$, dada por

$$\alpha(t) = a + t(b - a),$$

es una trayectoria de a a b contenida en K. Por lo tanto K es conexo por trayectorias.

Proposición 7.2.2. *Sea X un espacio topológico y $\{B_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una familia de subconjuntos conexos por trayectorias. Si $\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} B_\alpha \neq \emptyset$, entonces $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} B_\alpha$ es conexo por trayectorias.*

Demostración. Sean x y y dos puntos cualesquiera de $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} B_\alpha$. Entonces existen α_1 y α_2 en $\mathcal{A}$, tal que $x \in B_{\alpha_1}$ y $y \in B_{\alpha_2}$.

Consideremos $z \in \bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} B_\alpha$. Así, existe una función continua $h : [0, 1] \to B_{\alpha_1}$, tal que $h(0) = x$ y $h(1) = z$. Análogamente, existe una función continua $g : [0, 1] \to B_{\alpha_2}$ tal que $g(0) = z$ y $g(1) = y$. Definamos $f : [0, 1] \to \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} B_\alpha$, por

$$f(t) = \begin{cases} f(2t), & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ g(2t - 1), & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Claramente f es continua y constituye una trayectoria entre x y y. Por lo tanto $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} B_\alpha$ es conexo por trayectorias.

$\square$

Si X es un espacio topológico, definimos para cada $x \in X$ la **componente conexa por trayectorias** de X en el punto $x \in X$ (denotada por $C_t(x)$), como la unión de todos los subconjuntos conexos por trayectorias que contengan a x. Se sigue de la proposición 7.2.2, que si $x \neq y$, entonces $C_t(x) = C_t(y)$ o $C_t(x) \cap C_t(y) = \emptyset$.

Teorema 7.2.3. *Sea X un espacio topológico X. Entonces, para cualquier $x \in X$, $C_t(x) \subset C(x)$.*

Demostración. Sea $y \in C_t(x)$. Entonces existe una trayectoria $f : [0,1] \to X$, tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$. Así, $B = f([0,1])$ es un subconjunto conexo de X que contiene a x y a y, por lo que $B \subset C(x)$. Entonces, $y \in C(x)$ y por lo tanto $C_t(x) \subset C(x)$ como se quería demostrar. □

Corolario 7.2.4. *Sea X un espacio topológico conexo por trayectorias. Entonces X es conexo.*

Demostración. Como X es conexo por trayectorias, para cada $x \in X$, $C_t(x) = X$. Así, por el teorema 7.2.3, $C_t(x) \subset C(x)$. Consecuentemente, $C(x) = X$ lo cual prueba que X es conexo. □

El recíproco del corolario anterior no es cierto como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.2.3. Sea S el siguiente subconjunto del plano euclideano:

$$S = \big\{(t, \operatorname{sen} 1/t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in (0, 2/\pi]\big\} \cup \big\{(0,t) \mid t \in [-1,1]\big\}.$$

S es un espacio conexo pero no conexo por trayectorias. A este espacio se le conoce como **el seno del topólogo**

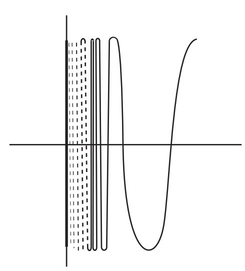


Figura 1. Seno del topólogo

Demostración. Notemos que la función $f : (0, 2/\pi] \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(t) = (t, \operatorname{sen} 1/t)$$

es continua por serlo en cada coordenada. Como el intervalo $(0, 2/\pi]$ es conexo (vease ejemplo 7.1.2) se sigue del teorema 7.1.7 que $f((0, 2/\pi])$ es conexo. Pero

$$f((0, 2/\pi]) = \big\{(t, \operatorname{sen} 1/t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in (0, 2/\pi]\big\},$$

por lo que podemos concluir que $\{(t, \operatorname{sen} 1/t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in (0, 2/\pi]\}$ es conexo. Ahora simplemente notemos que S es la cerradura de $f(0, 2/\pi]$. Entonces, por el corolario 7.1.9, S es conexo.

Demostraremos por contradicción que S no es conexo por trayectorias. Supongamos que existe una trayectoria $f : [-1,1] \to S$, tal que $f(-1) = (0,0)$ y $f(1) = (2/\pi, 1)$. Llamemos $Q = \{(0,t) \mid t \in [-1,1]\}$. Como Q es cerrado en S y f es continua. $f^{-1}(Q)$ es cerrado en el compacto $[-1,1]$. Así, $f^{-1}(Q)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ y por lo tanto existe $b \in f^{-1}(Q) \subset [-1,1]$, tal que $b = \text{máx}\{t \mid t \in f^{-1}(Q)\}$. Además, $b < 1$, por lo que podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $b = 0$.

Supongamos que

$$f(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in [-1,1].$$

Así, la función $x : [-1,1] \to \mathbb{R}$ es una función continua. Notemos que $x(-1) = 0$. Así, en virtud del corolario 7.1.6, para cada $n \in \mathbb{N}$, el segmento $[0, x(\frac{1}{n})] \subset x([-1,1])$. Así, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos escoger un número $\mu_n \in (0, x(1/n))$, y un número $t_n \in (0, 1/n)$ tal que

$$x(t_n) = \mu_n$$

y

$$\text{sen}(1/\mu_n) = (-1)^n.$$

Así, la sucesión $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0, y por la continuidad de la función y, la sucesión $(y(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $y(0)$. Pero $(y(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es precisamente la sucesión $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ la cual no converge. Esta contradicción nos permite concluir que S no es conexo por trayectorias. □

Al igual que la conexidad, la conexidad por trayectorias se preserva bajo funciones continuas.

Teorema 7.2.5. *Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre dos espacios topológicos. Si X es conexo por trayectorias, entonces Y es conexo por trayectorias.*

Demostración. Sean $f(x)$ y $f(y) \in Y$. Como X es conexo por trayectorias, existe una trayectoria $\alpha : [0,1] \to X$ tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$. Sea $\gamma = f \circ \alpha : [0,1] \to Y$. Entonces γ es una trayectoria tal que $\gamma(0) = f(x)$ y $\gamma(1) = f(y)$. Por lo tanto, Y es conexo por trayectorias. □

Teorema 7.2.6. *Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una familia de espacios topologicos. Entonces $X = \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$ es conexo por trayectorias si y sólo si X_α es conexo por trayectorias para toda $\alpha \in \mathcal{A}$.*

Demostración. Supongamos que X es conexo por trayectorias. Como para toda $\alpha \in \mathcal{A}$, la proyección $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ es continua, por el teorema 7.2.5, $X_\alpha = \pi_\alpha(X)$ es un espacio conexo por trayectorias.

Ahora supongamos que para toda $\alpha \in \mathcal{A}$, X_α es conexo por trayectorias. Sean $x = \{x_\alpha\}$ y $y = \{y_\alpha\}$, dos puntos arbitrarios en X. Entonces, para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, exite una trayectoria $f_\alpha : [0,1] \to X_\alpha$, tal que $f_\alpha(0) = x_\alpha$ y $f_\alpha(1) = y_\alpha$. Definamos $f : [0,1] \to X$ como el producto diagonal

$$f = \mathop{\triangle}_{\alpha \in \mathcal{A}} f_\alpha.$$

Así, f es una trayectoria, tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$. Por lo tanto, X es conexo por trayectorias. □

7.3. Espacios localmente conexos

Definición 7.3.1. *Se dice que un espacio topológico X es* ***localmente conexo en el punto*** $x \in X$*, si para toda vecindad U de x existe un abierto conexo V, tal que*

$$x \in V \subset U.$$

Diremos que X es ***localmente conexo****, si es localmente conexo en todo punto $x \in X$.*

Ejemplo 7.3.1. El espacio de los números racionales $\mathbb{Q}$ con su topología heredada de $\mathbb{R}$ no es localmente conexo, ya que para todo $q \in \mathbb{Q}$, si V es vecindad de q, existe $p \in V$, $p \neq q$. Si consideramos un número irracional r entre p y q, es claro que los abiertos $\{s \in V \mid s < r\}$ y $\{s \in V \mid s > r\}$ forman una separación de V.

Ejemplo 7.3.2. Sea P el siguiente subespacio de $\mathbb{R}^2$

$$P = \{(t,0) \mid t \in [0,1]\} \cup \{(0,t) \mid t \in [0,1]\} \cup \{(1/n,t) \mid t \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Entonces P es un espacio conexo (de hecho conexo por trayectorias) pero no localmente conexo. Al espacio P se le suele llamar **el peine**.

Demostración. Definamos los siguientes conjuntos:

$$P_0 = \{(t,0) \mid t \in [0,1]\} \cup \{(0,t) | t \in [0,1]\}$$

y

$$P_n = \{(t,0) \mid t \in [0,1]\} \cup \{(1/n,t) \mid t \in [0,1]\}.$$

Notemos que P_i es conexo para cada $i \in \{0,1,\dots\}$. En efecto, para toda i, el conjunto P_i es la unión de dos conjuntos conexos por trayectorias (de hecho

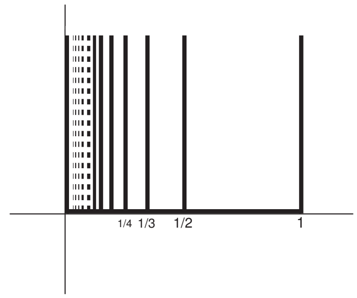


FIGURA 2. Peine

homeomorfos al intervalo $[0,1]$) con intersección no vacía y por lo tanto es conexo por trayectorias. Ahora notemos que

$$P = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_n.$$

Como $\bigcap_{n=0}^{\infty} P_n = \{(t,0) \mid t \in [0,1]\} \neq \emptyset$, podemos aplicar la proposición 7.2.2 para garantizar que P es un conjunto conexo por trayectorias.

Sea O una vecindad del punto $a = (0,1)$ que no contenga al conjunto $\{(t,0) \mid t \in [0,1]\}$. Demostraremos que para toda vecindad V de a en P tal que $V \subset O$, V es disconexa.

Sea $V \subset O$ una vecindad cualquiera de $(0,1)$. Como P tiene la topología heredada de $\mathbb{R}^2$, existe un abierto V' en $\mathbb{R}^2$, tal que $V = V' \cap P$. Así, existe $\delta > 0$, tal que $(-\delta,\delta) \times (1-\delta, 1+\delta) \subset V'$. Escojamos $n \in \mathbb{N}$, tal que $\frac{1}{n} < \delta$. Entonces $(\frac{1}{n}, 1) \in V$.

Sean $\xi \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$, $U' = \{(x,y) \mid x < \xi\}$ y $W' = \{(x,y) \mid x > \xi\}$. Notemos que U' y V' son abiertos en $\mathbb{R}^2$, por lo que $U = U' \cap P$ y $W = W' \cap P$ son abiertos en P. Además $(0,1) \in U$ y $(\frac{1}{n}, 1) \in W$. Notemos que

$$P \setminus (U \cup W) = (\xi, 0)$$

el cual no está en V. Entonces $V \cap U$ y $V \cap W$ consitituyen una separación de V, por lo que V es disconexo. Así, hemos demostrado que P no es localmente conexo. $\square$

Teorema 7.3.2. *Sea X un espacio topológico localmente conexo. Entonces toda componente conexa de X es cerrada y abierta.*

DEMOSTRACIÓN. Sea C una componente conexa de X. Por el teorema 7.1.16, C es cerrado.

Demostremos que C es abierto. Sea $x \in C$ y U una vecindad arbitraria de x. Como X es localmente conexo, existe una vecindad V de x, tal que V es conexa y $V \subset U$. Como la componente conexa de x es el conjunto conexo más grande tal que $x \in C$, inferimos que $V \subset C$. Entonces x es punto interior de C y por lo tanto, C es un conjunto abierto. □

Definición 7.3.3. *Se dice que un espacio topológico X es **localmente conexo por trayectorias en el punto** $x \in X$ si para toda vecindad U de x, existe abierto conexo por trayectorias V tal que $x \in V \subset U$.*

*Diremos que X es **localmente conexo por trayectorias** si es localmente conexo por trayectorias en x, para todo $x \in X$.*

Se sigue de la definición anterior que un espacio localmente conexo por trayectorias es localmente conexo. Veamos otras propiedades de este tipo de espacios.

Ejemplo 7.3.3. La recta real es un espacio localmente conexo por trayectorias. En efecto, la colección $\mathcal{B} = \{(a, b) \mid a < b\}$ es una base para la topología de $\mathbb{R}$ formada totalmente por vecindades conexas por trayectorias.

Ejemplo 7.3.4. Cualquier espacio discreto D es localmente conexo por trayectorias, ya que $\mathcal{D} = \big\{\{d\} \mid d \in D\big\}$ es una base para D constituída en su totalidad por abiertos conexos por trayectorias.

Teorema 7.3.4. *Sea X un espacio topológico localmente conexo por trayectorias. Entonces los siguientes enunciados se cumplen.*

(1) Toda componente conexa por trayectorias es cerrada y abierta.
(2) Si X es conexo, entonces X es conexo por trayectorias.
(3) Para todo $x \in X$, $C_t(x) = C(x)$.

DEMOSTRACIÓN.

(1) Sean C una componente conexa por trayectorias y $x \in C$. Escojamos una vecindad arbitraria U de x. Entonces existe una vecindad V de x tal que V es conexo por trayectorias y $V \subset U$. Evidentemente $V \subset C$, lo cual demuestra que C es abierto.

Por otro lado, notemos que

$$C = X \setminus \bigcup_{y \notin C_t(x)} C_t(y).$$

Por el parrafo anterior, cada $C_t(y)$ es un conjunto abierto, y por lo tanto su unión es abierta. Así, C un conjunto cerrado.

(2) Si X es conexo, entonces el único conjunto no vacío abierto y cerrado es X. Sea C_t una componente conexa por trayectorias. Por el inciso (1), C_t es un conjunto no vacío, abierto y cerrado. Entonces $C_t = X$, Por lo que podemos concluir que X es conexo por trayectorias.

(3) Sea $x \in X$. Entonces $C_t(x) \subset C(x)$. Por otro lado, como $C(x)$ es conexo, por el inciso (2), $C(x)$ es conexo por trayectorias. Consecuentemente, $C(x) = C_t(x)$, como se quería demostrar.

$\square$

La conexidad local y la conexidad local por trayectorias, a diferencia de sus análogos globales, no se preservan bajo funciones continuas. Para ilustrar este hecho, consideremos la función identidad de los números racionales con la topología discreta, a estos mismos números con su topología usual. La función es claramente continua y hemos visto que el dominio es localmente conexo por trayectorias en tanto que la imagen no es siquiera localmente conexa.

Recordemos que una **retracción** es una función $r : X \to X$ tal que $r|_{r(X)} = Id_{r(X)}$, y que en este contexto se dice que $r(X)$ es un **retracto** de X. Demostraremos que las retracciones sí preservan la conexidad local (por trayectorias) por medio de la siguiente equivalencia:

Proposición 7.3.5. *Un espacio topológico X es localmente conexo (por trayectorias) si y sólo si para todo $x \in X$, y para todo V vecindad de x existe un conjunto A conexo (por trayectorias) tal que $x \in \operatorname{Int}(A) \subset A \subset V$.*

Demostración. Basta demostrar que si un espacio X cumple que para todo $x \in X$, y para todo V vecindad de x existe un conjunto A conexo (por trayectorias) tal que $x \in \operatorname{Int}(A) \subset A \subset V$, entonces X es localmente conexo (por trayectorias), ya que la otra implicación es trivial. Sean $x \in X$, V una vecindad de x. Queremos construir un abierto conexo (por trayectorias) U tal que $x \in U \subset V$. Existe un conjunto conexo A_0 tal que $x \in \operatorname{Int}(A)$ y $A \subset V$. Para cada $a \in A_0$, existe un conexo A_1^a tal que $a \in \operatorname{Int}(A_1^a)$ y $A_1^a \subset V$. Llamemos $A_1 = \bigcup\limits_{a \in A_0} A_1^a$, y observemos que $A_0 \subset \operatorname{Int}(A_1)$, $A_1 \subset V$ y que A_1 es conexo (por trayectorias), ya que si $x, y \in A_1$, existen $a, b \in A_0$ tales que $x \in A_1^a$ y $b \in A_1^b$, y es fácil ver que $A_1^a \cup A_0 \cup A_1^b$ es un conjunto conexo (por trayectorias) que contiene a x y a y, y está contenido en A_1.

Así, siguiendo este proceso puede construirse una familia de conjuntos conexos (por trayectorias) $\mathcal{A} = \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ tal que $A_i \subset \operatorname{Int}(A_i + 1)$, y $A_i \subset V$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Sea

$$U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Entonces $x \in U \subset V$, U es conexo (por trayectorias) ya que es unión de conexos (por trayectorias) que tienen intersección no vacía, y finalmente U es abierto ya que para todo $u \in U$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $u \in A_n$, por lo que $u \in \text{Int}(A_{n+1}) \subset U$. Esto concluye la prueba. □

Teorema 7.3.6. *Sean X un espacio localmente conexo, y $A \subset X$ un retracto de X. Entonces A es localmente conexo.*

Demostración. Sean $a \in A$, V vecindad de a en A. Entonces $V' = r^{-1}(V)$ es abierto en X. Como X es localmente conexo, existe un abierto conexo U tal que $a \in U \subset V$. El conjunto $r(U)$ es conexo y está contenido en V, y además $a \in U \cap A \subset r(U)$, por lo que $a \in \text{Int}(r(U))$. La proposición anterior nos permite concluir que A es localmente conexo. □

Análogamente puede probarse que la conexidad local por trayectorias también es invariante bajo retracciones.

7.4. Ejercicios del capítulo

1. Demuestra que $\mathbb{R}^2$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}$.
2. Demuestra que $\mathbb{S}^1$ no es homeomorfo al intervalo $[0,1]$. Usa este hecho para concluir que $[0,1)$ y $(0,1)$ no son homeomorfos.
3. Demuestra que si X es un conjunto infinito provisto de la topología cofinita, entonces X es conexo.
4. Si X es un espacio T_0 y tiene una base de conjutos abiertos y cerrados demuestra que X es totalmente disconexo.
5. Sea $f : X \to Y$ tal que para todo subconjunto conexo C, $f(C)$ es conexo ¿Se puede concluir que X es conexo?
6. Sea X un espacio topológico y $x \in X$. Consideremos
$$\mathcal{F} = \{A \subset X | A \text{ es cerrado y abierto y } x \in A\}.$$
Demuestra que $C(x) \subset \bigcap_{A\in\mathcal{F}} A$. Además, si X es localmente conexo, entonces $C(x) = \bigcap_{A\in\mathcal{F}} A$.
7. Sea X un espacio topológico ¿Es cierto que las componentes conexas por trayectorias de X son subconjuntos cerrados? Demuéstralo o da un contraejemplo.
8. Demuestra que si C es un subconjunto conexo y abierto de $\mathbb{R}^n$, entonces C es conexo por trayectorias.
9. Demuestra que la recta de Sorgenfrey es totalmente disconexa. Concluye que la recta de Sorgenfrey no es localmente conexa.

10. Sea P el espacio construido en el ejemplo 7.3.2. Considerea el subespacio $T \subset P$ definido por
$$T = P \setminus \{(x,y)|x=0,\ y<1\}.$$
Demuestra que T es un espacio conexo, pero no localmente conexo ni conexo por trayectorias.
11. Da un ejemplo de un espacio topológico X y de un punto $x \in X$, tal que $C(x)$ no sea un conjunto abierto.
12. Sea A un conjunto numerable de la recta real. Demuestra que A no es conexo.
13. ¿Es cierto que la imagen continua de un espacio localmente conexo es localmente conexo? Demuestralo o da un contraejemplo.
14. Demuestra que el Seno del topólogo no es localmente conexo.
15. Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una familia de espacios topológicos. Demuestra que $\prod\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$ es localmente conexo si y sólo si X_α es localmente conexo para todo $\alpha \in \mathcal{A}$ y X_α es conexo para todo $\alpha \in \mathcal{A}$ salvo un número finito.
16. Sea X un espacio de Hausdorff. Sea $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de subconjuntos compactos y conexos, tales que $C_{n+1} \subset C_n$. Demuestra que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n$ es un subconjunto conexo.
17. Da un ejemplo de un espacio de Hausdorff, y de una familia $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos conexos, tales que $C_{n+1} \subset C_n$ y $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n$ no sea conexo.
18. Denota por $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}||z|=1\}$. Sea $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un conjunto denso y numerable en $\mathbb{S}^1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denota por J_n al segmento cerrado con extremos en z_n y $z_n/(n+1)$. Demuestra que $X = \{0\}\cup\Big(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} J_n\Big) \subset \mathbb{C}$ con la topología heredada de $\mathbb{C}$ es un espacio conexo.
19. Sea X un espacio localmente conexo por trayectorias y $r : X \to X$ una función continua e idempotente (i.e. para todo $x \in X$ se tiene $r\big(r(x)\big) = x$). Demuestra que $r(X)$ es localmente conexo por trayectorias.

Parte 2

Topología II

Capítulo 8

Paracompacidad y Teoremas de Metrizabilidad

La noción de *paracompacidad* fue introducida en 1944 por el matemático Dieudonné. La clase de los espacios paracompactos, juega un papel fundamental en la topología, ya que no sólo generaliza la noción de compacidad, sino también, la de metrizabilidad.

8.1. Paracompacidad

Definición 8.1.1. *Sea X un espacio topológico y $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una colección de subconjuntos de X. Se dice que $\mathcal{U}$ es **localmente finita**, si para todo punto $x \in X$, existe una vecindad V de x, tal que V intersecta sólo una cantidad finita de elementos de $\mathcal{U}$.*

*Por otro lado, diremos que la familia $\mathcal{U}$ es **σ-localmente finita**, si $\mathcal{U} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n$, donde cada $\mathcal{U}_n$ es una familia localmente finita.*

Ejemplo 8.1.1. Sea X la recta real y

$$\mathcal{U} = \{(-n, n)\}_{n\in\mathbb{N}} \ \text{ y } \ \mathcal{V} = \{(n, n+2)\}_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Entonces, $\mathcal{V}$ es localmente finita, pero $\mathcal{U}$ no lo es.

En efecto, si V es una vecindad arbitraria de 0, entonces $V \cap (-n, n) \neq \emptyset$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, por lo que $\mathcal{U}$ no puede ser localmente finita.

Por otro lado, para todo $x \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \leq x < n+1$. Sea $W = (n-1, n+1)$. Entonces, para todo $V \in \mathcal{V}$, $V \cap W =\neq \emptyset$ si y sólo si

$$V = (n-2, n), \text{ ó } V = (n-1, n+1), \text{ ó } V = (n, n+2).$$

Por lo tanto, $\mathcal{V}$ es localmente finita.

Las familias localmente finitas, poseen muchas propiedades interesantes, algunas de ellas se enuncian en la siguiente proposición.

Proposición 8.1.2. *Sea $\mathcal{B}$ una familia localmente finita de subconjuntos de un espacio vectorial X. Entonces los siguientes enunciados se cumplen:*

1. *Cualquier $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, es una colección localmente finita.*
2. *La colección $\{\overline{B} | B \in \mathcal{B}\}$ es localmente finita.*

3. $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} \overline{B} = \overline{\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B}$.

Demostración. 1. Sea $x \in X$. Entonces existe una vecindad U de x que intersecta únicamente una cantidad finita de elementos de $\mathcal{B}$. Como $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, U también intersecta únicamente una cantidad finita de elementos de $\mathcal{A}$. Así, podemos concluir que $\mathcal{A}$ es localmente finita.

2. Para cualquier $x \in X$, existe una vecindad U de x que intersecta una cantidad finita de elementos de $\mathcal{B}$, digamos $B_1, \dots B_n$. Evidentemente, para cada uno de estos subconjuntos $U \cap \overline{B}_i \neq \emptyset$. Supongamos que existe $B \in \mathcal{B}$, tal que $U \cap \overline{B} \neq \emptyset$. Entonces

$$U \cap B \neq \emptyset,$$

por lo que $B = B_i$ para alguna $i \in \{1, \dots, n\}$. Consecuentemente, podemos concluir que U intersecta únicamente una cantidad finita de elementos de $\{\overline{B}|B \in \mathcal{B}\}$, y por lo tanto esta colección es localmente finita.

3. Sabemos que $B' \subset \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$ para toda $B' \in \mathcal{B}$, de manera que $\overline{B'} \subset \overline{\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B}$, y por lo tanto tenemos la inclusión

$$\bigcup_{B\in\mathcal{B}} \overline{B} \subset \overline{\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B}.$$

Para demostrar la otra inclusión considermos $x \in \overline{\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B}$. Como $\mathcal{B}$ es localmente finita, existe una vecindad V de x, tal que V intersecta sólo un número finito de elementos de $\mathcal{B}$. Sean $\mathcal{A} = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ dichos elementos. Como $V \cap B = \emptyset$ para todo $B \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{A}$, podemos afirmar que

$$x \notin \overline{\bigcup_{B\in\mathcal{B}\setminus\mathcal{A}} B}.$$

Pero sabíamos que

$$x \in \overline{\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B} = \overline{\Big(\bigcup_{B\in\mathcal{B}\setminus\mathcal{A}} B\Big) \cup \bigcup_{B\in\mathcal{A}} B} = \overline{\Big(\bigcup_{B\in\mathcal{B}\setminus\mathcal{A}} B\Big)} \cup \overline{\bigcup_{B\in\mathcal{A}} B},$$

de manera que

$$x \in \overline{\bigcup_{B\in\mathcal{A}} B}.$$

Recordemos que $\mathcal{A}$ es un conjunto finito, entonces

$$x \in \overline{\bigcup_{B\in\mathcal{A}} B} = \bigcup_{B\in\mathcal{A}} \overline{B} \subset \bigcup_{B\in\mathcal{B}} \overline{B}.$$

Por lo tanto, podemos concluir que

$$\bigcup_{B\in\mathcal{B}} \overline{B} = \overline{\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B},$$

como se quería demostrar. $\square$

Definición 8.1.3. *Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ cubiertas de un espacio topológico X. Se dice que $\mathcal{V}$* ***refina*** *a $\mathcal{U}$ (o $\mathcal{V}$ es* ***refinamiento*** *de $\mathcal{U}$) si para todo $V \in \mathcal{V}$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $V \subset U$.*

Definición 8.1.4. *Sea X un espacio topológico de Hausdorff. Se dice que X es paracompacto, si toda cubierta abierta posee un refinamiento localmente finito.*

Es fácil ver que todos los espacios compactos, son espacios paracompactos. Sin embargo, la clase de los espacios paracompactos es mucho más amplia.

Ejemplo 8.1.2. La recta real es un espacio paracompacto.

En efecto, si $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de $\mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, escojamos una cantidad finita de elementos de $\mathcal{U}$ que cubran al compacto $[n, n+1]$. Sean $U_1^n, \ldots, U_{k_n}^n$ dichos elementos. Denotemos por $\mathcal{U}_n$ la siguiente colección de conjuntos

$$\mathcal{U}_n = \{U_i^n \cap (n-1, n+2) | i = 1, \ldots, n_k\}.$$

Sea $\mathcal{V} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{U}_n$. Entonces $\mathcal{V}$ es una cubierta abierta y localmente finita de $\mathbb{R}$ que refina a $\mathcal{U}$.

Ahora veremos algunas propiedades básicas de los espacios paracompactos.

Lema 8.1.5. *Sean X un espacio paracompacto y A y B dos subconjuntos cerrados de X. Supongamos que para cada punto $x \in B$, existen dos vecindades V_x y U_x, de x y de A, respectivamente, tales que $V_x \cap U_x = \emptyset$. Entonces, podemos encontrar dos abiertos ajenos U y V tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.*

Demostración. Para cada $x \in B$, consideremos las vecindades V_x y U_x como en las hipótesis del lema. Notemos que la familia

$$\mathcal{V} = \{V_x\}_{x\in B} \cup \{X \setminus B\}$$

es una cubierta abierta del espacio paracompacto X. Consecuentemente, existe un refinamiento localmente finito $\{W_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$. Consideremos el siguiente conjunto

$$\mathcal{B} = \{\alpha \in \mathcal{A} | B \cap W_\alpha \neq \emptyset\}.$$

De esta manera, tenemos que

$$B \subset V = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{B}} W_\alpha.$$

Por otro lado, afirmamos que $A \cap \overline{W_\alpha} = \emptyset$ para cualquier $\alpha \in \mathcal{B}$. Para convencernos de ello, supongamos lo contrario; es decir, que existe $\beta \in \mathcal{B}$, tal que $A \cap \overline{W_\beta} \neq \emptyset$. Como $\{W_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ es refinamiento de $\mathcal{V}$, existe un punto $x \in B$, tal que $W_\beta \subset V_x$. Por hipótesis, también existe una vecindad U_x de A tal que $V_x \cap U_x = \emptyset$. Como $A \subset U_x$, se tiene que

$$U_x \cap \overline{V_x} \neq \emptyset.$$

Pero esto último sólo sucede si y sólo si $U_x \cap V_x \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Consecuentemente, $A \cap W_\alpha = \emptyset$ para toda $\alpha \in \mathcal{B}$. Sea

$$U = X \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathcal{B}} \overline{W}_\alpha.$$

Entonces $A \subset U$. Además, por la proposición 8.1.2, $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{B}} \overline{W}_\alpha = \overline{\bigcup_{\alpha \in \mathcal{B}} W_\alpha}$, por lo que U es un conjunto abierto. Como $U \cap V = \emptyset$, U y V son las vecindades buscadas. □

Proposición 8.1.6. *Todo espacio paracompacto es normal*

DEMOSTRACIÓN. Sean A y B dos subconjuntos cerrados de X y fijemos un punto arbitrario $b \in B$. Como X es Hausdorff, para cada $a \in A$, existen dos vecindades ajenas, U_a y V_a, de a y de b, respectivamente. Aplicando el lema 8.1.5, podemos encontrar dos vecindades ajenas U_b y V_b, de A y de b. Hagamos esto para todos los puntos $b \in B$. En estas condiciones, podemos aplicar nuevamente el lema 8.1.5 para encontrar dos vecindades ajenas de A y de B, U y V. Consecuentemente, X es un espacio normal, como se quería demostrar. □

La paracompacidad es una propiedad débilmente hereditaria, como lo veremos en la siguiente proposición.

Proposición 8.1.7. *Sea X un espacio topológico paracompacto y $F \subset X$ un subespacio cerrado. Entonces F es paracompacto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una cubierta abierta de F con abiertos en F. Para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, sea V_α abierto en X tal que

$$U_\alpha = V_\alpha \cap F.$$

Entonces $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}} \cup \{X \setminus F\}$ es una cubierta abierta de X. Consecuentemente, existe un refinamiento localmente finito, digamos $\mathcal{O}$. Así,

$$\mathcal{W} = \{O \cap F | O \in \mathcal{W}\},$$

es el refinamiento localmente finito de $\mathcal{U}$ que estamos buscando. $\square$

Teorema 8.1.8. *Sean X un espacio paracompacto, y $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una cubierta abierta de X. Entonces existe una cubierta abierta localmente finita, $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_\alpha$, tal que $\overline{V}_\alpha \subset U_\alpha$, para toda $\alpha \in \mathcal{A}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una cubierta abierta de X. Entonces

$$\mathcal{W} = \{W \subset X | W \text{ es abierto en } X, \overline{W} \subset U_\alpha \text{ para algún } \alpha \in \mathcal{A}\}$$

es un refinamiento de $\mathcal{U}$.

Como X es un espacio regular, $\mathcal{W}$ es una cubierta abierta de X, y debido a que X es paracompacto, podemos encontrar un refinamiento localmente finito de $\mathcal{W}$, digamos $\mathcal{O}$. Supongamos que $\mathcal{O} = \{O_\beta\}_{\beta\in\mathcal{B}}$, para algún conjunto de índices $\mathcal{B}$. Como $\mathcal{O}$ es refinamiento de $\mathcal{W}$, también es refinamiento de $\mathcal{U}$. Así, podemos encontrar por cada $\beta \in \mathcal{B}$, un índice $f(\beta) \in \mathcal{A}$, tal que

$$\overline{O}_\beta \subset U_{f(\beta)}.$$

Así, podemos definir la siguiente colección: $\mathcal{B}_\alpha = \{\beta \in \mathcal{B} | f(\beta) = \alpha\}$. Sea $V_\alpha = \bigcup\limits_{\beta\in\mathcal{B}_\alpha} O_\beta$. Claramente $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ es una cubierta abierta para X. Además, como $\mathcal{O}$ es localmente finita, también lo es $\{O_\beta\}_{\beta\in\mathcal{B}_\alpha}$. Consecuentemente,

$$\overline{V}_\alpha = \overline{\bigcup_{\beta\in\mathcal{B}_\alpha} O_\beta} = \bigcup_{\beta\in\mathcal{B}_\alpha} \overline{O}_\beta,$$

por lo que $\overline{V}_\alpha \subset U_\alpha$.

Para completar la prueba, falta demostrar que $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ es localmente finita. Para ello consideremos un punto arbitrario $x \in X$. Como $\mathcal{O}$ es localmente finita, existe una vecindad W de x tal que $W \cap O_\beta \neq \emptyset$ si y sólo si $\beta \in \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$. Entonces $W \cap V_\alpha \neq \emptyset$ si y sólo si $\alpha \in \{f(\beta_1), \ldots, f(\beta_n)\}$, lo cual prueba lo que se quería. $\square$

8.2. Particiones de Unidad

Las particiones de unidad son una herramienta de gran importancia tanto en topología como en análisis. Como lo veremos más adelante, las particiones de unidad están íntimamente relacionadas con las cubiertas localmente finitas y consecuentemente, aparecen con frecuencia en el estudio de espacios paracompactos. Veamos de qué se trata.

Primero recordemos que el **soporte** de una función $\varphi : X \to \mathbb{R}$ definida en un espacio topológico X, se define como el siguiente conjunto:

$$\text{sop } \varphi = \overline{\{x \in X | \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Definición 8.2.1. *Sea X un espacio topológico y $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una familia de funciones continuas $\varphi_\alpha : X \to [0,1]$ que satisfacen las siguientes dos propiedades:*

1. *La familia $\{sop\ \varphi_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ es localmente finita.*
2. *$\sum\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} \varphi_\alpha(x) = 1$ para todo $x \in X$.*

Entonces la familia $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ se llama ***partición de unidad****.*

Además, si $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_\alpha \in \mathcal{A}$ es una cubierta de X, se dice que $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ es una partición de unidad ***subordinada*** *a $\mathcal{U}$, si sop $\varphi_\alpha \subset U_\alpha$ para toda $\alpha \in \mathcal{A}$.*

Teorema 8.2.2. *Si X es un espacio topológico paracompacto, entonces cualquier cubierta abierta $\mathcal{U}$ admite una partición de unidad subordinada a $\mathcal{U}$*

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una cubierta abierta del espacio paracompacto X. Por el teorema 8.1.8, podemos encontrar una cubierta abierta localmente finita $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$, tal que $\overline{V}_\alpha \subset U_\alpha$ para toda $\alpha \in \mathcal{A}$. Aplicando nuevamente el teorema 8.1.8, podemos encontrar una nueva cubierta localmente finita $\{W_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$, tal que $\overline{W}_\alpha \subset V_\alpha$ para todo $\alpha \in \mathcal{A}$.

Por el lema de Urysohn, existen funciones continuas $p_\alpha : X \to [0,1]$, $\alpha \in \mathcal{A}$, tales que:

$$p_\alpha(x) = 0, \quad \text{para todo } x \in X \setminus V_\alpha,\ p_\alpha(x) = 1 \text{ para todo } x \in \overline{W}_\alpha.$$

Consideremos la función $q : X \to \mathbb{R}$ dada por $q(x) = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} p_\alpha(x)$.

Afirmación 1 q es una función continua.

Sea $x_0 \in X$. Como $\mathcal{V}$ es localmente finita, existe una vecindad O de x_0 tal que $O \cap V_\alpha$ si y sólo si $\alpha \in \{\alpha_1, \dots \alpha_n\}$. Entonces, para todo $z \in O$ y para todo $\alpha \in \mathcal{A} \setminus \{\alpha_1, \dots \alpha_n\}$, se cumple que

$$p_\alpha(z) = 0.$$

Así,

$$q(z) = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} p_\alpha(z) = \sum_{i=1}^{n} p_{\alpha_i}(z).$$

Consecuentemente, $q|_O$ es en realidad una suma finita de funciones continuas y por tanto, q es continua en todo O, como se quería demostrar.

Como $\mathcal{W}$ es cubierta de X, para cada $x \in X$ existe al menos un $\alpha \in \mathcal{A}$, tal que $x \in W_\alpha$. De esta manera, $p_\alpha(x) = 1$ y por lo tanto $q(x) \geq p_\alpha(x) > 0$. Así, podemos definir $\varphi_\alpha : X \to [0,1]$ de la siguiente manera

$$\varphi(x) = \frac{p_\alpha(x)}{q(z)}.$$

Afirmación 2. La familia $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ es una partición de unidad subordinada a $\mathcal{U}$.

Primero notemos que φ_α es el cociente de dos funciones continuas y por lo tanto φ_α es continua para toda $\alpha \in \mathcal{A}$. Además, como $p_\alpha(x) \leq q(x)$ para todo $x \in X$, se tiene que

$$0 \leq \frac{p_\alpha(x)}{q(x)} = \varphi_\alpha(x) \leq 1,$$

por lo que $\varphi_\alpha(x) \in [0,1]$ para todo $\alpha \in \mathcal{A}$ y para todo $x \in X$.

Por otro lado, notemos que

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \varphi_\alpha(x) = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \frac{p_\alpha(x)}{q(x)} = \frac{1}{q(x)} \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} p_\alpha(x) = \frac{1}{q(x)} q(x) = 1.$$

Por último, notemos que si $x \in X \setminus V_\alpha$, entonces $p_\alpha(x) = 0$ y por lo tanto $\varphi_\alpha(x) = 0$. Así, $\varphi_\alpha^{-1}((0,1]) \subset V_\alpha$ por lo que

$$\text{sop } \varphi_\alpha = \overline{p^{-1}((0,1])} \subset \overline{V}_\alpha \subset U_\alpha,$$

lo cual demuestra que $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ está subordinada a $\mathcal{U}$.

Para completar la prueba, faltaría demostrar que $\{\text{sop}\varphi_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ es localmente finita, pero esto se sigue del hecho de que $\{\overline{V}_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ es una familia localmente finita y que $\{\text{sop}\varphi_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ es un refinamiento de esta última. □

8.3. El teorema de Stone

Definición 8.3.1. *Sea X un espacio topológico y $\mathcal{B}$ una familia de subconjuntos de X. Se dice que $\mathcal{B}$ es **discreta** si cualquier punto $x \in X$, posee una vecindad que intersecta a lo más a un elemento de $\mathcal{B}$.*

*Por otro lado, diremos que $\mathcal{B}$ es **σ-discreta**, si $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$, donde cada $\mathcal{B}_n$ es una familia discreta.*

Teorema 8.3.2. *Toda cubierta abierta de un espacio métrico posee un refinamiento que es localmente finito y σ-discreto.*

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ una cubierta abierta del espacio métrico (X,d). Fijemos un buen orden $\prec$ en $\mathcal{S}$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, definamos inductivamente familias $\mathcal{V}_i = \{V_{s,i}\}_{s\in\mathcal{S}}$ por

$$V_{s,i} = \bigcup_{c\in K_{s,i}} B(c, 2^{-i}),$$

donde $K_{s,i}$ es el conjunto de todos los puntos $c \in X$ que satisfacen las siguientes tres condiciones:

$$s \text{ es el mínimo tal que } c \in U_s \tag{21}$$

$$c \notin V_{t,j} \text{ para toda } j < i, \text{ y } t \in \mathcal{S}. \tag{22}$$

$$B(c, 3/2^i) \subset U_s \tag{23}$$

Para cada $x \in X$, sea $s \in \mathcal{S}$ el elemento mínimo tal que $x \in U_s$, y sea $i \in \mathbb{N}$, tal que $B(x, 3/2^i) \subset U_s$. Entonces, $x \in V_{s,i}$ ó $x \in V_{t,j}$ para algún $j < i$ y para algún $t \in \mathcal{S}$. En ambos casos, podemos concluir que $\mathcal{V} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{V}_i$ es un refinamiento de $\{U_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ ya que $V_{s,i} \subset U_s$ y $\mathcal{V}$ es cubierta de X.

Afirmamos que para todo $i \in \mathbb{N}$, se cumple la siguiente propiedad:

$$\text{(24)} \qquad \text{Si } x_1 \in V_{s_1,i},\ x_2 \in V_{s_2,i}, \quad \text{con } s_1 \prec s_2, \quad \text{entonces } d(x_1, x_2) > 1/2^i.$$

En efecto, por la definición de $V_{s_1,i}$ y de $V_{s_2,i}$, existen puntos c_1, $c_2 \in X$ que satisfacen las propiedades (21)-(23) y

$$x_1 \in B(c_1, 1/2^i) \subset V_{s_1,i}, \text{ y } x_2 \in B(c_2, 1/2^i) \subset V_{s_2,i}.$$

De la propiedad (23), se sigue que $B(c_1, 3/2^i) \subset U_{s_1}$, y de la propiedad (21) se sigue que $c_2 \notin U_{s_1}$. Entonces $c_2 \notin B(c_1, 3/2^i)$ y por lo tanto $d(c_1, c_2) \geq 3/2^i$. Consecuentemente,

$$d(x_1, x_2) \geq d(c_1, c_2) - d(c_1, x_1) - d(c_2, x_2) > 3/2^i - 1/2^i - 1/2^i = 1/2^i,$$

por lo que la propiedad (24) está demostrada. De aquí se sigue que $\mathcal{V}_i$ es una familia discreta ya que toda bola de radio $1/2^{i+1}$ sólo puede intersectar a lo más un elemento de $\mathcal{V}_i$. Así, la familia $\mathcal{V}$ es una familia σ-discreta.

Faltaría demostrar que $\mathcal{V}$ es localmente finita. Para esto, es suficiente demostrar que para toda $t \in S$, se cumple la siguiente propiedad:

$$\text{(25)} \qquad \text{si } B(x, 1/2^k) \subset V_{t,j}, \text{ entonces } B(x, 1/2^{j+k}) \cap V_{s,i} = \emptyset,$$

para todo $i \geq j + k$ y $s \in \mathcal{S}$.

Sabemos que $V_{s,i} = \bigcup_{c \in K_{s,i}} B(c, 2^{-i})$. Además, por (22) si $c \in K_{s,i}$ entonces $c \notin V_{t,j}$ para todo $j < i$. En particular, si $i \geq j + k$. Pero $B(x, 1/2^k) \subset V_{t,j}$, por lo que

$$d(x, c) > 1/2^k.$$

Consecuentemente,

$$B(x, 1/2^{j+k}) \cap B(c, 1/2^i) = \emptyset, \quad \text{para } i \geq j + k.$$

Por lo tanto, podemos concluir que $\mathcal{V}$ es un refinamiento localmente finito, como se quería demostrar. $\square$

Corolario 8.3.3. *Todo espacio métrico es paracompacto.*

8.4. El teorema de Nagata-Smirnov

Definición 8.4.1. *Sea X un espacio topológico. Se dice que un subconjunto $A \subset X$ es G_δ, si existe $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia numerable de conjuntos abiertos, tales que $A = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$.*

Por otro lado, diremos que A es F_σ, si existe $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia numerable de conjuntos cerrados, tales que $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$.

Ejemplo 8.4.1. Si (X, d) es un espacio métrico, entonces todo conjunto cerrado es G_δ.

En efecto, llamemos $O_n = \{x \in X | d(A, x) < 1/n\}$. Afirmamos que O_n es abierto y que $A = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} O_n$.

Sean $x \in O_n$, y $\eta = d(x, A) < 1/n$. Entonces $\varepsilon = 1/n - \eta > 0$. De esta manera, podemos considerar $B(x, \varepsilon)$, la bola abierta con centro en x y radio ε. Así, si $y \in B(x, \varepsilon)$, entonces

$$d(y, A) \leq d(y, x) + d(x, A) < \varepsilon + \eta = 1/n - \eta + \eta = 1/n.$$

De este modo, podemos concluir que $y \in O_n$ y por lo tanto $B(x, \varepsilon) \subset O_n$, lo cual prueba que O_n es un conjunto abierto.

Ahora demostremos que $A = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} O_n$. Claramente A es subconjunto de O_n, para toda $n \in \mathbb{N}$, por lo que la contención

$$A \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$$

es evidente. Por otro lado, si $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} O_n$, entonces $d(x, A) = 0$, por lo que $x \in \overline{A}$. Pero A es un subconjunto cerrado, por lo que $\overline{A} = A$. De aquí que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n \subset \overline{A} = A,$$

y por lo tanto $A = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} O_n$.

Observemos que si un subconjunto A de un espacio topológico es G_δ si y sólo si su complemento es F_σ. En efecto, $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n$, donde cada U_n es abierto, si y sólo si $X \setminus A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (X \setminus U_n)$, donde cada $X \setminus U_n$ es un conjunto cerrado.

Lema 8.4.2. *Sea X un espacio regular con una base σ-localmente finita. Entonces X es normal y todo cerrado en X es G_δ.*

Demostración. Afirmación 1. Para cualquier abierto $W \subset X$, existe una sucesión de abiertos U_n, tales que

$$W = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n.$$

En efecto, sea $\mathcal{B}$ una base para la topología de X que sea σ-localmente finita. Entonces $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$, donde cada $\mathcal{B}_n$ es una familia localmente finita.

Sea $\mathcal{E}_n = \{B \in \mathcal{B} | B \in \mathcal{B}_n,\ B \subset \overline{B} \subset W\}$. Definamos, $U_n = \bigcup_{B \in \mathcal{E}_n} B$. Entonces U_n es abierto y $U_n \subset W$. Como $\mathcal{E}_n \subset \mathcal{B}_n$, se tiene que $\mathcal{E}_n$ es una familia localmente finita. Así, podemos aplicar la proposición 8.1.2-3, y concluir que

$$\overline{U}_n = \overline{\bigcup_{B \in \mathcal{E}_n} B} = \bigcup_{B \in \mathcal{E}_n} \overline{B} \subset W.$$

Entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n \subset W$.

Por otro lado, como X es regular, para cada $x \in W$, existe $B \in \mathcal{B}$, tal que $x \in B \subset \overline{B} \subset W$. Entonces, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $B \in \mathcal{B}_n$, por lo que $B \in \mathcal{E}_n$. Consecuentemente, $x \in U_{n_0}$ y por lo tanto $W \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_n$, lo cual demuestra lo que queríamos.

Afirmación 2. Todo conjunto cerrado es un G_δ.

Sea C un subconjunto cerrado en X. Si $W = X \setminus C$, entonces W es un conjunto abierto. Por el paso 1, existe una sucesión U_n de subconjuntos abiertos tales que

$$W = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n.$$

Entonces, $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus \overline{U}_n)$. Como cada $X \setminus \overline{U}_n$ es un conjunto abierto, podemos concluir que C es un conjunto G_δ.

Afirmación 3. X es normal.

Sean C y D dos subconjuntos cerrados y disjuntos de X. Por el paso 1, existe una familia numerable de subconjuntos abiertos $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, tal que $X \setminus D = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n$. Entonces $\{U_n\}$ cubre a C y cada $\overline{U}_n$ es disjunto con D. De manera similar, existe una familia numerable de conjuntos abiertos

$\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que cubre a D y tal que $\overline{V}_n \cap C = \emptyset$. Definamos los siguientes conjuntos:

$$U'_n = U_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V}_i, \;\; V'_n = V_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U}_i.$$

Entonces los conjuntos $U = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U'_n$ y $V = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} V'_n$ son dos vecindades disjuntas de C y D, respectivamente, lo cual demuestra que X es un espacio normal.

□

Cabe señalar que un espacio en el que cada conjunto cerrado es un G_δ recibe el nombre de espacio **perfectamente normal**.

Lema 8.4.3. *Sea A un conjunto normal y A un subconjunto G_δ de X. Entonces existe una función $f : X \to [0,1]$, tal que $A = f^{-1}(0)$.*

Demostración. Como A es G_δ, $X \setminus A$ es F_σ. Entonces existe una familia numerable de subconjuntos cerrados, $\{B_n\}$, tal que $X \setminus A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$. Consecuentemente, para cada natural n, A y B_n son conjuntos disjuntos, por lo que podemos aplicar el lema de Urysohn para encontras una función $f_n : X \to [0,1]$, tal que

$$f_n(a) = 0, \;\; \text{para todo } a \in A, \;\; f_n(x) = 1, \;\; \text{para todo } x \in B_n.$$

Construyamos $f : X \to [0,1]$ de la siguiente manera

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x), \;\; \text{para todo } x \in X.$$

Por el criterio de Weierstrass, f es una función continua. Además, para todo $a \in A$, $f(a) = 0$. Por otro lado, si $x \in X \setminus A$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $x \in B_{n_0}$. Consecuentemente, $f_{n_0}(x) = 1$, y por lo tanto

$$f(x) \geq 1/2^{n_0} f_{n_0}(x) = 1/2^{n_0} > 0.$$

Así, podemos concluir que $A = f^{-1}(0)$, lo cual prueba el lema. □

Teorema 8.4.4 (Nagata-Smirnov)**.** *Un espacio X es metrizable si y sólo si X es regular y tiene una base σ-localmente finita.*

Demostración. Primero supongamos que X es un espacio regular y que posee una base $\mathcal{B}$, σ-localmente finita. Entonces, $\mathcal{B} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$, donde cada $\mathcal{B}_n$ es una familia localmente finita. Para cada $B \in \mathcal{B}_n$, usemos el lema 8.4.3 para encontrar una función $f_{n,B} : X \to [0, 1/n]$ tal que

$$f_{n,B}(x) > 0, \;\; \text{para todo } x \in B,$$
$$f_{n,B}(x) = 0 \;\; \text{para todo } x \in X \setminus B.$$

Afirmación. La familia $\{f_{n,B}\}$ separa puntos de cerrados en X.

En efecto, sea D un subconjunto cerrado en X y $x \in X \setminus D$. Entonces existe una vecindad U de x disjunta de D. Luego, podemos encontrar un abierto básico, $B \in \mathcal{B}$, tal que $x \in B \subset U$. Además, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $B \in \mathcal{B}_{n_0}$. Consecuentemente, $f_{n_0,B}(x) > 0$, y $f_{n_0,B}(D) \subset f_{n_0,B}(X \setminus B) = \{0\}$. De aquí se sigue inmediatamente que $f(x) \notin \overline{f(D)}$. Por lo tanto $\{f_{n,B}\}$ separa puntos de cerrados.

Sea $J = \{(n,B) | n \in \mathbb{N},\ B \in \mathcal{B}_n\}$. Por el teorema del encaje de Tychonoff, la función $F : X \to [0,1]^J$ dada por

$$F(x) = \{f_{n,B}(x)\}_{(n,B)\in J}$$

define un encaje topológico, donde el producto topológico $[0,1]^J$ tiene la topología de Tychonoff, τ.

Ahora dotemos al conjunto $[0,1]^J$ con la topología uniforme, τ_u. Es decir, la topología inducida por la métrica

$$d(x,y) = \sup_{j\in J} |x_j - y_j|, \quad \text{donde } x = \{x_j\},\ y = \{y_j\}.$$

La topología uniforme es más fina que la de Tychonoff, por lo que la función identidad

$$Id : ([0,1]^J, \tau) \to ([0,1]^J, \tau_u)$$

es una función abierta. Así, la función $g : X \to ([0,1]^J, \tau_u)$, dada por $g(x) = F(x)$ es una función abierta. Para completar la prueba es suficiente demostrar que g es continua.

Sea $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, elijamos una vecindad U_n de x_0 que intersecte sólo a un número finito de elementos de $\mathcal{B}_n$. Sean $B_{n1}, \dots B_{nk_n}$ dichos elementos. Entonces, si $B \neq B_{ni}$ (con $i = 1, \dots k_n$), se cumple que

$$f_{n,B}(x) = 0, \quad \text{para todo } x \in U_n.$$

Por la continuidad de las funciones $f_{n,B_{ni}}$ (con $i = 1, \dots k_n$), existe una vecindad V_n de x_0 tal que

$$|f_{nB_{ni}}(x) - f_{nB_{ni}}(x_0)| < \varepsilon/2, \quad \text{para todo } x \in V_n,\ i = 1, \dots k_n.$$

Además, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $V_n \subset U_n$. Sea $p \in \mathbb{N}$ tal que $1/p < \varepsilon/2$. Definamos V por

$$V = \bigcap_{i=1}^{p} V_i.$$

Entonces V es una vecindad de x_0. Notemos que para todo $x \in V$,

$$d(g(x), g(x_0)) < \varepsilon.$$

En efecto, si $n \leq p$, entonces para toda $x \in V$ y para todo $B \in \mathcal{B}_n$ se tiene que

$$|f_{n,B}(x) - f_{n,B}(x_0)| < \varepsilon/2.$$

Por otro lado, si $n > p$, entonces para todo $x \in X$, y para todo $B \in \mathcal{B}_n$ se tiene que

$$|f_{n,B}(x) - f_{n,B}(x_0)| \leq 1/n < 1/p \leq \varepsilon/2,$$

esto último debido al hecho de que $f_{n,B}$ toma valores en el intervalo $[0, 1/n]$. Consecuentemente, podemos concluir que para todo $x \in V$, se cumple que

$$d(g(x), g(x_0)) = \sup_{(n,B)\in J} |f_{n,B}(x) - f_{n,B}(x_0)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Así, podemos concluir que g es una función continua y por lo tanto X es homeomorfo a un subespacio del espacio métrico $([0,1]^J, \tau_u)$, lo cual prueba que X es metrizable.

Ahora supongamos que X es metrizable. Claramente X es un espacio regular, por lo que sólo nos falta demostrar que X tiene una base $\sigma-$localmente finita. Para ello consideremos los siguientes conjuntos

$$\mathcal{U}_n = \{B(x, 1/n)\}_{x\in X},$$

donde $B(x, 1/n)$ denota la bola abierta de centro en x y radio $1/n$. Por el teorema de Stone, X es paracompacto, por lo que podemos encontrar por cada $n \in \mathbb{N}$ un refinamiento localmente finito, $\mathcal{B}_n$, de $\mathcal{U}_n$.

Afirmamos que $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$ es base para la topología de X. Primero notemos que cada $B \in \mathcal{B}_n$ satisface que

$$d(x, y) \leq 2/n, \quad \text{para cualesquiera puntos } x, y \in B.$$

Por otro lado, dados $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$, tal que $2/m < \varepsilon$. Como $\mathcal{B}_m$ cubre a X, existe $B \in \mathcal{B}_m$ tal que $x \in B$. Así, para cualquier $y \in B$, se tiene que

$$d(x, y) \leq 2/m < \varepsilon.$$

Consecuentemente, $x \in B \subset B(x, \varepsilon)$, lo cual prueba que $\mathcal{B}$ es una base σ-localmente finita. □

Teorema 8.4.5. *Sea X un espacio regular. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

Toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento que es:

1. *Cubierta abierta σ-localmente finita.*
2. *Cubierta localmente finita.*
3. *Cubierta cerrada localmente finita.*
4. *Cubierta abierta localmente finita.*

Demostración. $(4 \Rightarrow 1)$. Es evidente.

$(1 \Rightarrow 2)$. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Aplicando (1), encontremos un refinamiento abierto $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$ que sea σ-localmente finito. Entonces

$$\mathcal{V} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n,$$

donde cada $\mathcal{V}_n$ es una familia localmente finita. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea

$$V_k = \bigcup_{U \in \mathcal{B}_k} U.$$

Luego, definamos para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $U \in \mathcal{B}_n$, el siguiente conjunto:

$$S_n(U) = U \setminus \bigcup_{k<n} V_k.$$

Notemos que $S_n(U) \subset U$, para toda $U \in \mathcal{B}_n$. Así, la colección

$$\mathcal{C}_n = \{S_n(U) | U \in \mathcal{B}_n\},$$

es un refinamiento de $\mathcal{B}_n$. Consideremos $\mathcal{C} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n$. Afirmamos que $\mathcal{C}$ es el refinamiento buscado. Para probarlo, necesitamos demostrar que $\mathcal{C}$ es una cubierta localmente finita de X y que refina a $\mathcal{U}$. Esto último es consecuencia inmediata del hecho de que $\mathcal{C}$ es refinamiento de $\mathcal{V}$, el cual a su vez refina a $\mathcal{U}$.

Sea $x \in X$. Necesitamos demostrar que x pertenece a algún elemento de $\mathcal{C}$ y que existe una vecindad de x que sólo intersecta una cantidad finita de elementos de $\mathcal{C}$. Como $\mathcal{V} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n$ cubre a X, podemos encontrar un natural n_0 con la propiedad de ser el mínimo natural para el cual x pertenece a algún elemento de $\mathcal{V}_{n_0}$. Entonces x no pertenece a ningún elemento de de $\mathcal{V}_k$, si $k < n_0$. Consecuentemente, $x \notin V_k$, para toda $k < n_0$. Además, existe $U \in \mathcal{V}_{n_0}$ tal que $x \in U$. Así, podemos asegurar que

$$x \in S_{n_0}(U) - \bigcup_{k<n} V_k \in \mathcal{C}.$$

Por otro lado, como $\mathcal{V}_n$ es localmente finita, para cada $k = 1, \ldots n_0$, podemos encontrar una vecindad W_k de x, que intersecte únicamente una cantidad finita de elementos de $\mathcal{V}_k$. Si W_k intersectara a un elemento $S_k(V) \in \mathcal{C}_k$, entonces W_k intersectaría a $V \in \mathcal{V}_k$, puesto que $S_k(V) \subset V$. Pero W_k sólo intersecta una cantidad finita de elementos de $\mathcal{V}_k$, por lo que sólo puede intersectar una cantidad finita de elementos de $\mathcal{C}_k$.

Además, como $U \in \mathcal{V}_{n_0}$, U no puede intersectar a ningún elemento de $\mathcal{V}_n$, para toda $n > n_0$. Consecuentemente, la vecinad

$$O = U \cap W_1 \cap \cdots \cap W_{n_0},$$

intersecta sólo una cantidad finita de elementos de $\mathcal{C}$, lo cual completa la prueba de $(1 \Rightarrow 2)$.

$(2 \Rightarrow 3)$. Sean $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X y $\mathcal{V}$ la colección de todos los conjuntos abiertos V, tales que $\overline{V} \subset U$ para algún $U \in \mathcal{U}$. Por la regularidad de X, la familia $\mathcal{V}$ es cubierta de X y por (2), podemos encontrar un refiamiento localmente finito $\mathcal{W}$, de $\mathcal{V}$. Entonces, $\mathcal{D} = \{\overline{W} | W \in \mathcal{W}\}$ es un refinamiento cerrado de $\mathcal{U}$, y por la proposición 8.1.2-2, $\mathcal{D}$ es localmente finito.

$(3 \Rightarrow 4)$. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Por (3), podemos encontrar un refinamiento cerrado $\mathcal{B}$ de $\mathcal{U}$ localmente finito. Para cada $x \in X$, sea U_x una vecindad de x que intersecte únicamente una cantidad finita de elementos de $\mathcal{B}$. Entonces, la familia $\{U_x\}_{x\in X}$ constituye una cubierta abierta de X.

Aplicando nuevamente (3), podemos encontrar $\mathcal{C}$, un refinamiento cerrado y localmente finito de $\{U_x\}_{x\in X}$. Consecuentemente, cada elemento de $\mathcal{C}$ intersecta únicamente una cantidad finita de elementos de $\mathcal{B}$.

Para cada elemento $B \in \mathcal{B}$, sea

$$\mathcal{C}(B) = \{C | C \in \mathcal{C},\ C \subset X \setminus B\}.$$

Como la familia $\mathcal{C}$ es localmente finita, también lo es $\mathcal{C}(B)$ para cada $B \in \mathcal{B}$. Aplicando la proposición 8.1.2-3, podemos asegurar que $\bigcup_{C\in\mathcal{C}(B)} C$ es un conjunto cerrado para cada $B \in \mathcal{B}$. De aquí que el conjunto

$$E(B) = X \setminus \left(\bigcup_{C\in\mathcal{C}(B)} C \right)$$

es abierto en X. Además, $B \subset E(B)$ para toda $B \in \mathcal{B}$.

Por otro lado, recordemos que $\mathcal{B}$ es refinamiento de $\mathcal{U}$, por lo que podemos escoger para cada $B \in \mathcal{B}$, un elemento $U(B) \in \mathcal{U}$, tal que $B \subset \mathcal{U}(B)$. Así, si definimos $V(B) = E(B) \cap U(B)$, tenemos que $B \subset V(B)$ para toda $B \in \mathcal{B}$, por lo que la familia

$$\mathcal{V} = \{V(B)\}_{B\in\mathcal{B}}$$

es una cubierta abierta de X. Además, como $V(B) \subset U(B) \in \mathcal{U}$, se tiene que $\mathcal{V}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$. Para completar la prueba sólo falta demostrar que $\mathcal{V}$ es una familia localmente finita.

Primero observemos que cada elemento $C \in \mathcal{C}$ intersecta únicamente una cantidad finita de elementos de $\mathcal{V}$. Para ello notemos que si $C \cap E(B) \neq \emptyset$, entonces $C \not\subset X \setminus B$ y consecuentemente $B \cap C \neq \emptyset$. Pero recordemos que cada elemento de $\mathcal{C}$, sólo puede intersectar una cantidad finita de elementos de $\mathcal{B}$ (por la construcción de $\mathcal{C}$). Así, C intersecta únicamente una cantidad finita de $E(B)$'s y por lo tanto C sólo puede intersectar un número finito de elementos $V(B) \in \mathcal{V}$.

Ahora consideremos un punto $x \in X$ y W una vecindad de x que intersecte únicamente una cantidad finita de elementos de $\mathcal{C}$, digamos $C_1, \dots C_n$. Entonces, se tiene que

$$W \subset \bigcup_{i=1}^{n} C_i.$$

Como cada C_i intersecta una cantidad finita de elementos de $\mathcal{V}$, digamos $V(B_{i,1}) \dots V(B_{i,k_i})$, se sigue que si $W \cap V(B) \neq \emptyset$, entonces $B = B_{i,j}$, con $i = 1, \dots n$, $j = 1, \dots k_i$. Es decir, W intersecta únicamente una cantidad finita de elementos de $\mathcal{V}$, como se quería demostrar. □

8.5. Ejercicios

1. Sea X un espacio de Hausdorff. Supongamos que existe una cubierta abierta numerable, $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $\overline{U}_n$ es compacto, y $\overline{U}_n \subset U_{n+1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Demuestra que X es paracompacto.
2. Sea X un espacio regular. Supongamos que existe una cubierta abierta numerable, $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $\overline{U}_n$ es paracompacto. Demuestra que X es paracompacto.
3. Demuestra que en un espacio métrico, todos los subconjuntos abiertos son F_σ.
4. Considera el conjunto de los irracionales con la topología heredada de la recta real. Demuestra que éstos constituyen un conjunto G_δ.
5. Demuestra que un espacio es metrizable si y sólo si es regular y tiene una base σ discreta.

Capítulo 9

Espacio de Funciones

Consideremos dos espacios topológicos X, Y, y denotemos por Y^X al conjunto de todas las funciones $f : X \to Y$. Esto es, $Y^X = \prod_{x \in X} Y_x$ donde $Y_x = Y$ para todo $x \in X$.

Llamemos $C(X,Y)$, al subconjunto de Y^X que consta de todas las funciones continuas $f : X \to Y$. Existen muchas maneras de dotar al conjunto $C(X,Y)$ de una topología, en este capítulo se estudiarán las más usuales, sus características, ventajas y relaciones.

9.1. Topología punto-abierta

Si X y Y son dos espacios topológicos, para cada punto $x \in X$ y para cada abierto $U \subset Y$ denotaremos por $M(x,U)$ al siguiente subconjunto de $C(X,Y)$:

$$M(x,U) = \{f \in C(X,Y) \mid f(x) \in U\}.$$

Definición 9.1.1. *Sean X y Y espacios topológicos. Llamemos Γ a la colección*

$$\Gamma = \{M(x,U) \mid x \in X, U \text{ abierto en } Y\}.$$

*Como Γ cubre al espacio $C(X,Y)$ (De hecho $C(X,Y) \in \Gamma$ ya que $C(X,Y) = M(x,Y)$ para cualquier $x \in X$), existe una única topología en $C(X,Y)$ para la cual Γ es sub-base. Esta topología recibe el nombre de **topología punto-abierta**.*

En lo sucesivo, al conjunto $C(X,Y)$ dotado de la topología punto-abierta, lo denotaremos por $C_p(X,Y)$.

Ejemplo 9.1.1. Sean X un espacio topológico discreto y Y un espacio arbitrario. Ya que cualquier función $f : X \to Y$ resulta continua, los conjuntos $C(X,Y)$ y Y^X coinciden. Además, para cada abierto $U \subset Y$ y para cada punto $x \in X$, se tiene que $M(x,U) = \pi_x^{-1}(U)$, donde $\pi_x : Y^X \to Y$ denota la proyección en la $x-$ésima coordenada. Por lo tanto el espacio $C_p(X,Y)$ coincide con Y^X dotado de la topología producto.

Recordemos que una sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : X \to Y$ **converge puntualmente** a una función $f : X \to Y$, si la sucesión $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$ para cada punto $x \in X$. La topología punto-abierta también suele llamarse **topología de la convergencia puntual**. La siguiente proposición esclarece porqué:

Proposición 9.1.2. *Sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $C_p(X, Y)$ y $f \in C_p(X, Y)$. Entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en $C_p(X, Y)$ si y sólo si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a f.*

Demostración. Supongamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en $C_p(X, Y)$. Consideremos $x \in X$ y $U \subset Y$ una vecindad de $f(x)$. Entonces $M(x, U)$ es una vecindad de f en $C_p(X, Y)$. Como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en $C_p(X, Y)$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N_0$, $f_n \in M(x, U)$. Consecuentemente, para todo $n \geq N_0$, $f_n(x) \in U$, lo cual prueba que la sucesión $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$, como se quería demostrar.

Ahora supongamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a f. Sea $W = \bigcap\limits_{i=1}^{k} M(x_i, U_i)$ una vecindad básica de f en $C_p(X, Y)$. Notemos que para cualquier $i = 1, \ldots, k$, se tiene que $f(x_i) \in U_i$, por lo que U_i es una vecindad de $f(x_i)$.

Como $(f_n(x_i))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x_i)$ para todo $i = 1, \ldots, k$, existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N_i$, se cumple que $f_n(x_i) \in U_i$. Sea

$$N_0 = \max_{i=1}^{k} \{N_i\}.$$

Entonces, si $n \geq N_0$, se tiene que $f_n(x_i) \in U_i$ para todo $i = 1, \ldots, k$. Luego, $f_n \in M(x_i, U_i)$ para todo $i = 1, \ldots, k$ y con ello, $f_n \in W$ para todo $n \geq N_0$. Así, queda demostrado que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en $C_p(X, Y)$. $\square$

Teorema 9.1.3. *Sean X y Y espacios topológicos. Entonces $C_p(X, Y)$ es homeomorfo a un subespacio del producto $Y^X = \prod\limits_{x\in X} Y_x$.*

Demostración. Consideremos la función $\phi : C_p(X, Y) \to \prod\limits_{x\in X} Y_x$, dada por

$$\phi(f) = (f(x))_{x\in X}.$$

Demostremos que ϕ es un encaje.

Si $f \neq g$, entonces existe $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) \neq g(x_0)$, por lo que $\phi(f) = (f(x))_{x\in X} \neq (g(x))_{x\in X} = \phi(g)$. Así queda demostrado que ϕ es inyectiva.

Veamos que si $\langle U_x \rangle = {\pi_x}^{-1}(U)$ es un abierto subbásico de Y^X, entonces

$$\begin{aligned}\phi^{-1}(\langle U_x \rangle) &= \{f \in C_p(X,Y) \mid \phi(f) \in \langle U_x \rangle\}\\ &= \{f \in C_p(X,Y) \mid f(x) \in U\}\\ &= M(x,U),\end{aligned}$$

con lo que hemos probado que ϕ es continua.

Por otro lado, si $O = \bigcap_{i=1}^{n} M(x_i, U_i)$ es un abierto básico en $C_p(X,Y)$, entonces $f \in O$ si y sólo si $f(x_i) \in U_i$ para toda $i = 1, \dots, n$. Es decir, $f \in O$ si y sólo si $\phi(f) \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle$. Por lo tanto,

$$\phi(O) = \langle U_1, \dots, U_n \rangle \cap \phi\left(C_p(X,Y)\right),$$

lo cual prueba que ϕ es una función abierta (sobre su imagen) y por lo tanto es un encaje. $\square$

La proposición anterior evidencía que en la topología de la convergencia puntual para $C(X,Y)$ la topología de X cobra relativamente poca importancia en la estructura de $C_p(X,Y)$ (tan sólo toma parte en determinar el conjunto subyacente). La topología punto-abierta presenta más desventajas, una de ellas el hecho de que una sucesión de funciones continuas puede converger puntualmente a una función discontinua. El siguiente ejemplo nos ilustra este hecho.

Ejemplo 9.1.2. Sea $X = Y = [0,1]$. Para cada entero positivo n, denotemos por $f_n : X \to Y$ a la función dada por $f_n(x) = x^n$. Entonces la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a la función discontinua $f : X \to Y$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Por esta razón, en la siguiente sección buscaremos otra topología para $C(X,Y)$ en la que no ocurra lo anterior.

9.2. Topología de la Convergencia Uniforme de funciones

Si Z es un espacio metrizable y d es una métrica que define la topología de Z, diremos que d es acotada si

$$\sup\left\{d\left(z_1, z_2\right) \mid z_1 \in Z, z_2 \in Z\right\} < \infty.$$

Notemos que un mismo espacio metrizable puede tener distintas métricas que definan su topología, algunas de las cuales pueden ser acotadas y otras no. Por ejemplo, si $Z = \mathbb{R}$, podemos considerar las métricas d_1 y d_2 definidas por

$$d_1(x,y) = |x-y|, \quad d_2(x,y) = \text{mín}\{1, |x-y|\}.$$

Ambas métricas generan la topología euclidiana en $\mathbb{R}$. Sin embargo, la métrica d_2 es acotada mientras que la métrica d_1 no lo es.

Definición 9.2.1. *Sean X un espacio topológico y Y un espacio metrizable. Supongamos que d es una métrica que define la topología de Y. Diremos que una función $f : X \to Y$ es **d-acotada**, si*

$$\sup\{d(f(x_1), f(x_2)) \mid x_1, x_2 \in X\} < \infty$$

El conjunto de todas las funciones $f : X \to Y$ continuas y d-acotadas será denotado por $BC(X,Y,d)$ y cuando no haya riesgo de confusión lo llamaremos simplemente $BC(X,Y)$.

Podemos hacer notar que si Y es un espacio métrico y $d_1 \neq d_2$ son dos métricas distintas, en general los conjuntos $BC(X,Y;d_1)$ y $BC(X,Y;d_2)$ pueden ser distintos.

Por otro lado, si d es una métrica acotada, entonces $BC(X,Y;d) = C(X,Y)$. También se puede observar que si X es un espacio compacto y Y es un espacio metrizable, entonces por el teorema de Weierstrass toda función continua $f : X \to Y$ es d-acotada, para cualquier métrica d que defina la topología de Y. Así, en este caso, los conjuntos $BC(X,Y)$ y $C(X,Y)$ también coinciden.

Proposición 9.2.2. *Sean X un espacio topológico, Y un espacio metrizable y d una métrica que defina la topología de Y. Consideremos la función*

$$d^* : BC(X,Y,d) \times BC(X,Y,d) \to \mathbb{R}$$

dada por

$$d^*(f,g) = \sup\{d(f(x), g(x)) \mid x \in X\}.$$

*Entonces d^* define una métrica en $BC(X,Y,d)$ la cual llamaremos **métrica del supremo**. La topología en $BC(X,Y,d)$ generada por d^* recibe el nombre de **topología de la convergencia uniforme**.*

La demostración es muy simple y la dejamos como ejercicio al lector.

Así, si d es una métrica que define la topología de un espacio Y y X es cualquier espacio topológico, el par $(BC(X,Y,d), d^*)$ es un espacio métrico. Si la métrica d es acotada, tendríamos que d^* define una métrica en $C(X,Y)$. En este caso, denotaremos a dicho espacio por $C_u(X,Y,d)$ y cuando no haya riesgo de confundirnos sobre qué métrica d se está considerando, lo denotaremos simplemente por $C_u(X,Y)$.

En el siguiente ejemplo veremos que dos métricas equivalentes en Y, pueden definir distintas topologías en $C(X,Y)$.

Ejemplo 9.2.1. Sea $X = Y = \mathbb{R}$. Consideremos las métricas d_1 y d_2 en $\mathbb{R}$, dadas por

$$d_1(x,y) = \text{mín}\{1, |x-y|\}, \quad d_2(x,y) = \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right|.$$

Ambas métricas generan la topología euclidiana en $\mathbb{R}$. Además, como las dos métricas son acotadas, los siguientes conjuntos coinciden:

$$BC(X,Y,d_1) = BC(X,Y,d_2) = C(X,Y)$$

Sin embargo, la topología generada por d_1^* es distinta a la generada por d_2^*. Para convencernos de ello, consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $f_n : X \to Y$ dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x < n, \\ n, & \text{si } x \geq n. \end{cases}$$

Entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión contenida en $C(X,Y)$. Sea $f : X \to Y$ la función identidad. Notemos que

$$d_1^*(f_n, f) = \sup\{d_1(f_n(x), f(x)) \mid x \in X\} = \sup\{d_1(f_n(x), x) \mid x \in X\} = 1,$$

por lo que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a f en $C_u(X,Y;d_1)$.

Sin embargo, si $x < n$ entonces $d_2(f_n(x), f(x)) = 0$. Por lo tanto,

$$d_2^*(f_n, f) = \sup_{x\in X} d_2(f_n(x), f(x)) = \sup_{x\geq n} \left| \frac{n}{1+n} - \frac{x}{1+x} \right|.$$

Pero $\frac{x}{1+x}$ es creciente, por lo que

$$\sup_{x\geq n} \left| \frac{n}{1+n} - \frac{x}{1+x} \right| = \lim_{x\to\infty} \left| \frac{n}{1+n} - \frac{x}{1+x} \right| = 1 - \frac{n}{1+n} = \frac{1}{n+1}.$$

Consecuentemente, $d_2^*(f_n, f) < \frac{1}{n}$, lo cual nos permite concluir que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en $C_u(X,Y;d_2)$. Así, podemos observar que la topología generada por d_2^* no coincide con la topología generada por d_1^*.

Dados dos espacios topológicos X y Y, denotemos por

$$C^*(X,Y) = \left\{ f \in C(X,Y) \mid \overline{f(X)} \text{ es compacto} \right\}.$$

Teorema 9.2.3. *Si Y es metrizable, la topología de la convergencia uniforme en $C^*(X,Y)$ depende únicamente de la topología de Y y no depende de la métrica de Y.*

Demostración. Sean d_1 y d_2 dos métricas equivalentes en Y (es decir, la topología generada por d_1 coincide con la generada por d_2). Para demostrar el teorema, hace falta probar que las métricas d_1^* y d_2^* son equivalentes. Para ello, es suficiente mostrar que si una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^*(X,Y)$ converge a una función f en la métrica d_1^* entonces también converge a f en la métrica d_2^* y viceversa.

Supongamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f con la métrica d_1^*. Entonces

$$d_1^*(f_n, f) \rightsquigarrow 0.$$

Supongamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a f con la métrica d_2^*. Entonces existe $\varepsilon > 0$ y una subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$d_2^*(f_{n_k}, f) > \varepsilon \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Pero $d_2^*(f_{n_k}, f) = \sup\{d_2(f_n(x), f(x)) \mid x \in X\}$. Por esta razón, existe una sucesión
$(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$, tal que

$$d_2(f_{n_k}(x_k), f(x_k)) > \varepsilon.$$

Pero $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}} \subset \overline{f(X)}$ y por hipótesis $\overline{f(X)}$ es compacto. Por consiguiente, existe una subsucesión de $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a un punto $z \in \overline{f(X)}$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que la sucesión misma $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge a z en Y. Más aún, como las métricas d_1 y d_2 son equivalentes, podemos asegurar que las sucesiones $d_1(f(x_k), z)$ y $d_2(f(x_k), z)$ convergen ambas a 0. Por otro lado, como $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge a f en la métrica d_1^*, y como

$$d_1(f_{n_k}(x_k), f(x_k)) \leq d_1^*(f_{n_k}, f),$$

podemos concluir que la sucesión $(f_{n_k}(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge a z en la métrica d_1; es decir,

$$d_1(f_{n_k}(x_k), z) \longrightarrow 0.$$

Recordemos que las métricas d_1 y d_2 son equivalentes, entonces la sucesión $d_2(f_{n_k}(x_k), z)$ también converge a 0. Como consecuencia, existe k suficientemente grande para asegurar que
$d_2(f_{n_k}(x_k), z) < \varepsilon/2$ y $d_2(z, f(x_k)) < \varepsilon/2$.

Luego,

$$\varepsilon < d_2(f_{n_K}(x_k), f(x_k)) \leq d_2(f_{n_K}(x_k), z) + d_2(z, f(x_k)) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

lo cual es una contradicción. Esta contradicción nos permite concluir que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también converge a f en la métrica d_2^*. Análogamente podemos mostrar que la convergencia en la métrica d_2^* implica convergencia en la métrica d_1^*, así que d_1^* y d_2^* son métricas equivalentes. $\square$

Observemos que si X o Y es compacto, entonces los conjuntos $C^*(X,Y)$ y $C(X,Y)$ coinciden. De aquí podemos concluir que $C^*(X,Y) = C_u(X,Y)$

En otras palabras, si X o Y es compacto, entonces la topología en $C_u(X,Y)$ depende únicamente de la topología en Y y no de la métrica que le demos a éste.

9.2.1. Convergencia Uniforme.

Definición 9.2.4. *Sea X un espacio topológico y (Y,d) un espacio métrico. Diremos que una sucesión de funciones continuas, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C(X,Y)$ converge uniformemente a una función $f : X \to Y$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_0$, entonces $d\left(f_n(x), f(x)\right) < \varepsilon$ para todo $x \in X$.*

El siguiente teorema nos muestra por qué la topología de la convergencia uniforme recibe este nombre.

Teorema 9.2.5. *Sea X un espacio topológico y (Y,d) un espacio métrico. Entonces los siguientes enunciados se cumplen:*

a) Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $BC(X,Y)$ que converge uniformemente a una función $f : X \to Y$, entonces $f \in BC(X,Y)$.
b) La sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f en X si y sólo si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en la topología de la convergencia uniforme en $BC(X,Y)$.

Demostración.

a) Sean $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$. Como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f, podemos encontrar $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $x \in X$ y $n \geq N_0$, se cumpla que

$$d\left(f_n(x), f(x)\right) < \varepsilon/3.$$

Sea $n \geq N_0$. Como f_n es continua, existe una vecindad U de x_0, tal que para todo $x \in U$, se tiene

$$d\left(f_n(x_0), f_n(x)\right) < \varepsilon/3.$$

Así, si $x \in U$ podemos concluir que

$$\begin{aligned} d(f(x_0), f(x)) &\leq d(f(x_0), f_n(x_0)) + d(f_n(x_0), f_n(x)) + d(f_n(x), f(x)) \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

y por lo tanto f es continua.

Ahora veamos que f es $d-$acotada. Para ello, notemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $M_n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{x,y\in X} d\left(f_n(x), f_n(y)\right) < M_n.$$

Así, para cualquier par de puntos $x, y \in X$, se tiene que

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &\leq d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(y)) + d(f_n(y), f(y)) \\ &< \varepsilon/3 + M_n + \varepsilon/3 \\ &= M_n + 2\varepsilon/3 = M. \end{aligned}$$

Luego,

$$\sup_{x,y \in X} d\left(f(x), f(y)\right) \leq M < \infty,$$

por lo que podemos concluir que f es $d-$acotada, como se quería demostrar.

b) Supongamos que (f_n) converge uniformemente a f en X. Entonces, dada $\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N_0$ y para todo $x \in X$ se cumple que

$$d\left(f_n(x), f(x)\right) < \varepsilon/2.$$

Así, si $n \geq N_0$, tendríamos que

$$d^*\left(f_n, f\right) = \sup_{x \in X} d\left(f_n(x), f(x)\right) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

De esta manera podemos concluir que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a f en $BC(X, Y)$.

Por otro lado, si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a f en $BC(X, Y)$, dada $\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \geq N_0$, se cumple que

$$d^*\left(f_n, f\right) < \varepsilon.$$

Pero $d^*\left(f_n, f\right) \geq d\left(f_n(x), f(x)\right)$ para todo $x \in X$. Así, si $n \geq N_0$, tendríamos que para todo $x \in X$, $d\left(f_n(x), f(x)\right) < \varepsilon$, lo cual demuestra que (f_n) converge uniformemente a f en X. $\square$

Definición 9.2.6. *Sean X y Y espacios topológicos. La función $\Omega : C(X, Y) \times X \to Y$ dada por*

$$\Omega(f, x) = f(x)$$

*recibe el nombre de **función evaluación**.*

*Además, diremos que una topología τ para $C(X, Y)$ es **admisible** si la función evaluación es continua.*

Una de las ventajas de la topología de la convergencia uniforme, es que resulta admisible como veremos a continuación.

Teorema 9.2.7. *Sean X un espacio topológico y (Y, d) un espacio métrico. Entonces la topología de la convergencia uniforme en $BC(X, Y; d)$ es admisible.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $(f_0, x_0) \in C(X, Y; d) \times X$ y $\varepsilon > 0$. Llamemos $U = B(f(x_0), \varepsilon/2)$. Por la continuidad de f_0, el conjunto $V = f_0^{-1}(U)$ es una vecindad de x_0. Sea $O = B(f_0, \varepsilon/2) \subset C(X, Y; d)$. Consideremos $(f, x) \in O \times V$. Entonces $d^* (f, f_0) < \varepsilon/2$, por lo que

$$d\,(f(x), f_0(x)) < \varepsilon/2.$$

Por otro lado, como $x \in V$, se tiene que

$$d\,(f_0(x), f_0(x_0)) < \varepsilon/2.$$

Así,

$$\begin{aligned} d\,(\Omega(f, x), \Omega(f_0, x_0)) &= d\,(f(x), f_0(x_0)) \\ &\leq d\,(f(x), f_0(x)) + d\,(f_0(x), f_0(x_0)) \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \end{aligned}$$

lo cual prueba que Ω es continua. $\square$

Como consecuencia del teorema anterior se tiene el siguiente corolario.

Corolario 9.2.8. *Sean X un espacio topológico y (Y, d) un espacio métrico. Consideremos el espacio $BC(X, Y)$ con la topología de la convergencia uniforme. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $BC(X, Y)$ que converge a f en $BC(X, Y)$, y si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X que converge a un punto $x \in X$, entonces la sucesión $(f_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la sucesión (f_n, x_n) en $BC(X, Y) \times X$. Por hipótesis, dicha sucesión converge a (f, x). Por otro lado, como la función evaluación Ω es continua, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \Omega((f_n, x_n)) = \Omega(f, x).$$

Pero $\Omega(f_n, x_n) = f_n(x_n)$ y $\Omega(f, x) = f(x)$. Consecuentemente, la sucesión $(f_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$, como se quería demostrar. $\square$

La admisibilidad de la topología de la convergencia uniforme es una ventaja más sobre la topología de la convergencia puntual, ya que esta última no siempre es admisible. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 9.2.2. Consideremos el espacio $C_p(I,\mathbb{R})$ donde I denota el intervalo $[0,1]$. Para cada $n \geq 1$, llamemos $f_n : I \to \mathbb{R}$ a la función continua dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ \frac{nx-1}{n-1}, & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Entonces la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a la función constante f dada por $f(x) = 1\ \forall x \in I$. Por otro lado la sucesión $\left(\frac{1}{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en I a 0. Si la función evaluación fuera continua, tendríamos que

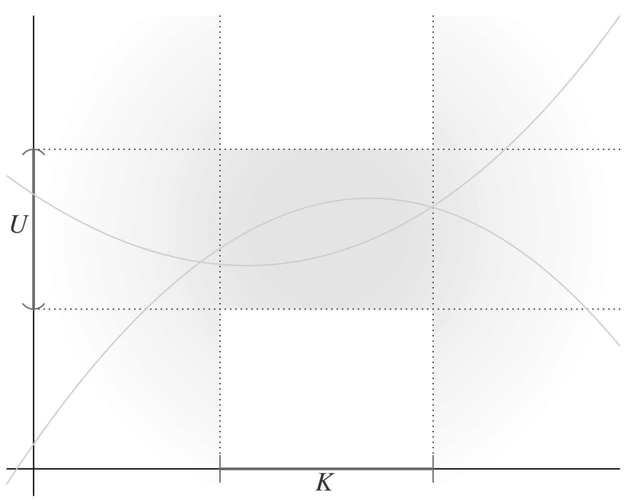
$$\lim_{n\to\infty} f(1/2n) = \lim_{n\to\infty} \Omega(f_n, 1/2n) = \Omega(f,0) = 1.$$

Sin embargo, para cada $n \geq 1$ tenemos $f_n(1/2n) = 1 - n(1/2n) = 1/2$, por lo que la sucesión $f_n(1/2n)$ converge a $1/2$, lo cual contradice la igualdad anterior. Así, podemos concluir que la topología de la convergencia puntual en $C_p(I,\mathbb{R})$ no es admisible.

9.3. La topología compacto-abierta

Definición 9.3.1. *Sean X y Y dos espacios topológicos. Para cada par de conjuntos $K \subset X$ y $U \subset Y$, definamos*

$$M(K,U) = \{f \in C(X,Y) \mid f(K) \subset U\}.$$



Llamemos τ_c a la topología en $C(X,Y)$ generada por la siguiente sub-base:

$$\{M(K,U) \mid K \text{ es compacto en } X \text{ y } U \text{ es abierto en } Y\}.$$

*τ_c recibe el nombre de **topología compacto-abierta**, y el espacio topológico $(C(X,Y),\tau_c)$ se denota por $C_c(X,Y)$.*

De la definición anterior, se sigue inmediatamente que la topología de la convergencia puntual es más débil que la topología compacto-abierta. Veamos algunas propiedades elementales de esta última topología.

Proposición 9.3.2. *Sean X y Y espacios topológicos, $K,K_1,K_2,\ldots,K_n$ subconjuntos de X y $W,W_1,W_2,\ldots,W_n$ subconjuntos de Y. Entonces los siguientes enunciados se cumplen:*

(a) $\bigcap\limits_{i=1}^{n} M(K_i,W) = M\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{n} K_i, W\Big)$.

(b) $\bigcap\limits_{i=1}^{n} M(K,W_i) = M\Big(K, \bigcap\limits_{i=1}^{n} W_i\Big)$.

(c) $\bigcap\limits_{i=1}^{n} M(K_i,W_i) \subset M\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{n} K_i, \bigcup\limits_{i=1}^{n} W_i\Big)$.

Demostración. (a) Sea $f \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} M(K_i,W)$. Entonces $f(K_i)\subset W$ para todo $i=1,\ldots,n$, y por lo tanto,

$$f\Big(\bigcup_{i=1}^{n} K_i\Big) \subset W.$$

Así, $f \in M\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{n} K_i, W\Big)$ por lo que $\bigcap\limits_{i=1}^{n} M(K_i,W) \subset M\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{n} K_i, W\Big)$

Por otro lado, si $f \in M\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{n} K_i, W\Big)$, entonces $f(K_i) \subset f\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} K_i\right) \subset W$ para todo $i=1,\ldots,n$, con lo que $f \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} M(K_i,W)$, lo cual prueba que $\bigcap\limits_{i=1}^{n} M(K_i,W) = M\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{n} K_i, W\Big)$.

(b) Si $f \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} M(K,W_i)$, entonces $f(K)\subset W_i$ para todo $i=1,\ldots,n$. Así, $f \in M\Big(K, \bigcap\limits_{i=1}^{n} W_i\Big)$, y por lo tanto,

$$\bigcap_{i=1}^{n} M(K,W_i) \subset M\Big(K, \bigcap_{i=1}^{n} W_i\Big).$$

Por otro lado, si $f \in M\Big(K, \bigcap\limits_{i=1}^{n} W_i\Big)$, entonces

$$f(K) \subset \bigcap_{i=1}^{n} W_i \subset W_k, \quad \text{para todo } k=1,\ldots,n.$$

Luego, $f \in \bigcap_{i=1}^{n} M(K, W_i)$, por lo que $\bigcap_{i=1}^{n} M(K, W_i) = M\Big(K, \bigcap_{i=1}^{n} W_i\Big)$.

(c) Sea $f \in \bigcap_{i=1}^{n} M(K_i, W_i)$. Entonces, para cada $i = 1, \ldots, n$, se tiene que $f(K_i) \subset W_i$. Así,

$$f\Big(\bigcup_{i=1}^{n} K_i\Big) \subset \bigcup_{i=1}^{n} W_i,$$

por lo que $f \in M\Big(\bigcup_{i=1}^{n} K_i, \bigcup_{i=1}^{n} W_i\Big)$, como se quería demostrar. □

Proposición 9.3.3. *Sean X y Y espacios topológicos, $K \subset X$ un subconjunto compacto y $W \subset Y$ un subconjunto abierto. Entonces $\overline{M(K, W)} \subset M(K, \overline{W})$.*

Demostración. Sea $g \in Y^X \setminus M(K, \overline{W})$. Basta demostrar que $g \notin \overline{M(K, W)}$. Como $g(K) \not\subset \overline{W}$, existe $a \in K$ tal que $g(a) \in Y \setminus \overline{W}$. Llamemos $V = Y \setminus \overline{W}$. Entonces V es abierto en Y y $g \in M(\{a\}, V)$, por lo que $M(\{a\}, V)$ es una vecindad abierta de g en $C_c(X, Y)$.

Notemos que para todo $f \in M(\{a\}, V)$, $f(a) \in V \subset Y \setminus W$, y por lo tanto $f \notin M(K, W)$. De esta manera $M(\{a\}, V) \cap M(K, W) = \emptyset$, lo cual prueba que $g \notin \overline{M(K, W)}$, como se quería demostrar. □

Veamos un ejemplo sencillo que ilustre los sub-básicos de la topología compacto-abierta.

Ejemplo 9.3.1. Consideremos $X = Y = \mathbb{R}$, $K = [1/2, 1]$ y $W = (1/5, 1 + 1/5)$. Sean $f, g, h \in Y^X$, donde:

$$f(x) = x^2, \; g(x) = x, \; h(x) = e^x \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

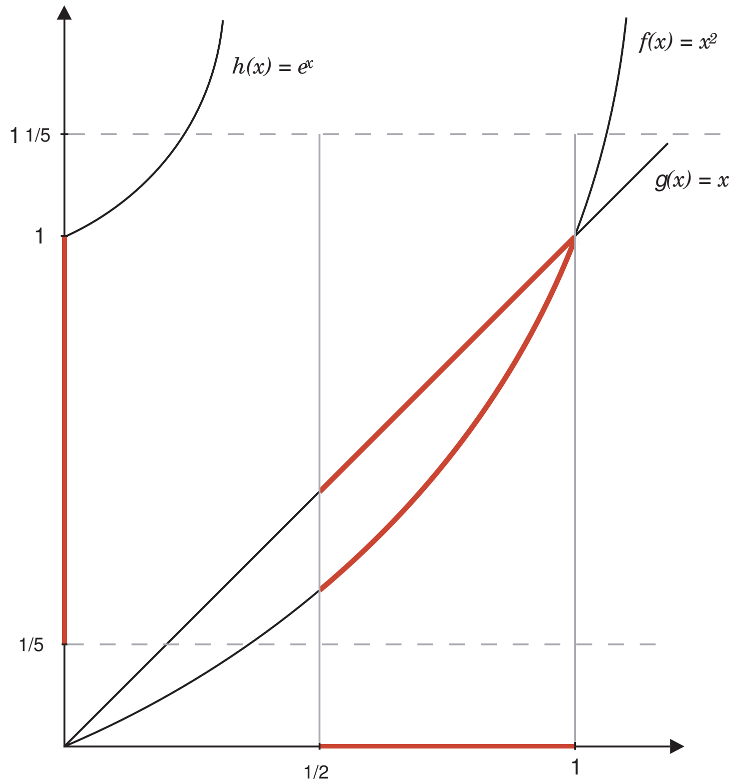
Entonces $f, g \in M(K, W)$ pero $h \notin M(K, W)$.

Proposición 9.3.4. *Sean X y Y espacios topológicos. Entonces Y se puede encajar en $C_c(X, Y)$.*

Demostración. Para cada punto $y \in Y$, definamos la función constante $c_y : X \to Y$ mediante

$$c_y(x) = y \text{ para todo } x \in X$$

Notemos que $c_y \in C(X, Y)$ y demostremos que el conjunto $\mathcal{C} = \{c_y \mid y \in Y\}$ dotado de la topología inducida por $C_c(X, Y)$ es homeomorfo a Y.



Afirmamos que para cualesquiera subconjuntos $A \subset X$ y $V \subset Y$, $c_y \in M(A, V)$ si y sólo si $y \in V$.

En efecto, si $c_y \in M(A, V)$, entonces $c_y(A) = \{y\} \subset V$. Por otro lado, si $y \in V$ para cualquier subconjunto $A \subset X$, $\{y\} = c_y(A) \subset V$, por lo que $c_y \in M(A, V)$, como se quería demostrar.

Definamos $h : Y \to \{c_y \mid y \in Y\} \subset C_c(X, Y)$ por $h(y) = c_y$. Es claro que h es biyectiva. Para demostrar la continuidad de h consideremos $y_0 \in Y$ y una vecindad sub-básica $M(A, V)$ de c_{y_0}. Como $c_{y_0} \in M(A, V)$, se tiene que $y_0 \in V$. Además, si $z \in V$, por la afirmación $c_z \in M(A, V)$. Así

$$h(V) \subset M(A, V),$$

lo cual demuestra la continuidad de h.

Ahora demostremos que h es abierta. Sea $V \subset Y$ abierto en Y y $h(y_0) = c_{y_0} \in h(V)$. Consideremos cualquier conjunto compacto $A \subset X$. Por la afirmación anterior, $c_{y_0} \in M(A, V)$. Por otro lado, si $c_z = h(z) \in M(A, V)$, entonces $z \in V$ y por lo tanto $h(z) \in h(V)$. Así, llegamos a que

$$h(y_0) \in M(A, V) \cap \mathcal{C} \subset h(V),$$

de donde podemos concluir que $h(V)$ es abierto en $\mathcal{C}$. Por consiguiente, h es abierta y por lo tanto es un homeomorfismo entre Y y $\mathcal{C} \subset C_c(X,Y)$, lo cual completa la prueba. $\square$

Se demostró en la proposición anterior que Y es homeomorfo al subespacio de $C_c(X,Y)$ compuesto por las funciones constantes. Cabe observar aquí que la topología relativa que induce la topología compacto-abierta en $\mathcal{C} = \{c_y \mid y \in Y\}$ de hecho coincide con la topología relativa inducida por la topología punto-abierta. Esto ya que para todo $A \subset X$, $x \in X$, y V abierto en Y,

$$M(A,V) \cap \mathcal{C} = M(\{x\},V) \cap \mathcal{C} = \{c_y \in \mathcal{C} \mid y \in V\}.$$

Además si Y es un espacio métrico, $M(A, B_\varepsilon(y)) \cap \mathcal{C} = B_\varepsilon(c_y) = \{c_z \in \mathcal{C} \mid z \in B_\varepsilon(y)\}$, así que la topología relativa en $\mathcal{C}$ inducida por la topología de convergencia uniforme también coincide con la que induce la compacto-abierta.

Proposición 9.3.5. *Sean X y Y espacios topológicos. Si Y_0 es un subespacio de Y, entonces $C_c(X,Y_0)$ es homemorfo a un subespacio de $C_c(X,Y)$.*

Demostración. Notemos que

$$C(X,Y_0) = \{f : X \to Y_0 \mid f \text{ es continua}\}$$

$$= \{f : X \to Y \mid f(X) \subset Y_0 \text{ y } f \text{ es continua}\} \subset C(X,Y).$$

Así, $C(X,Y_0)$ es un subconjunto de $C(X,Y)$. Para terminar la prueba, demostraremos que la topología compacto-abierta en $C(X,Y_0)$ coincide con la topología del subespacio inducida por $C_c(X,Y)$. Para esto bastará probar que cada subbásico en una topología es un abierto en la otra, o más aún, que estas familias de hecho coinciden. Recordemos que $V \subset Y_0$ es abierto en Y_0 si y sólo si existe $V' \subset Y$, abierto en Y, tal que $V = V' \cap Y_0$.

Sea $A \subset X$ un subconjunto compacto y $V \subset Y_0$ abierto. Entonces $M(A,V)$ es sub-básico de $C_c(X,Y_0)$. Pero, si $f \in M(A,V) \subset C(X,Y_0)$, entonces $f(A) \subset V = V' \cap Y_0 \subset V'$, por lo que $f \in M(A,V') \cap C(X,Y_0)$.

Análogamente, si $f \in M(A,V') \cap C(X,Y_0)$, entonces $f(A) \subset V'$ y $f(A) \subset f(X) \subset Y_0$, por lo que $f(A) \subset V' \cap Y_0 = V$. Consecuentemente, $f \in M(A,V) \subset C(X,Y_0)$, lo cual demuestra que

$$M(A,V) = M(A,V') \cap C(X,Y_0).$$

De esta forma, podemos concluir que los sub-básicos de $C_c(X,Y_0)$ en la topología compacto-abierta coinciden con los sub-básicos de $C(X,Y_0)$ con la topología inducida de $C_c(X,Y)$, lo cual completa la prueba. $\square$

Si X_0 es un subespacio del espacio topológico X, no necesariamente sucede que $C_c(X_0, Y)$ sea subespacio de $C_c(X, Y)$. Para convencernos de ello veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 9.3.2. Sea $X = [0, 1]$, $X_0 = (0, 1]$ y $Y = \mathbb{R}$. Consideremos la función $f \in C_c(X_0, Y)$ dada por

$$f(x) = \sin(1/x).$$

Como f no se puede extender continuamente a todo X, $f \notin C(X, Y)$, y por lo tanto $C_c(X_0, Y) \not\subset C_c(X, Y)$.

Teorema 9.3.6. *Sean X y Y dos espacios topológicos. Entonces los siguientes enunciados se cumplen:*

(a) Y es Hausdorff si y sólo si $C_c(X, Y)$ es Hausdorff.

(b) Y es regular si y sólo si $C_c(X, Y)$ es regular.

Demostración. Por la proposición 9.3.4, se tiene que Y es homeomorfo a un subespacio de $C_c(X, Y)$. De este modo, si $C_c(X, Y)$ es Hausdorff o regular, cualquier subespacio $Z \subset C_c(X, Y)$ será Hausdorff o regular, respectivamente. En particular, el subespacio homeomorfo a Y es Hausdorff o regular, y por lo tanto Y es Hausdorff o regular, respectivamente.

Demostremos las otras implicaciones.

(a) Supongamos que Y es Hausdorff. Considermos $f, g \in C_c(X, Y)$, tal que $f \neq g$. Entonces existe $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) \neq g(x_0)$. Como Y es Hausdorff, existen dos vecindades ajenas U y V, tales que $f(x_0) \in U$ y $g(x_0) \in V$. Luego, $M(\{x_0\}, U)$ y $M(\{x_0\}, V)$ son vecindades de f y de g en $C_c(X, Y)$. Si $M(\{x_0\}, U) \cap M(\{x_0\}, V) \neq \emptyset$, existiría $h \in C_c(X, Y)$ tal que $h(x_0) \in U$ y $h(x_0) \in V$, con lo que U y V no serían ajenas. Este hecho, nos permite concluir que

$$M(\{x_0\}, U) \cap M(\{x_0\}, V) = \emptyset$$

y por lo tanto $C_c(X, Y)$ es de Hausdorff.

(b) Supongamos que Y es regular. Sean $f \in C_c(X, Y)$ y $M(A, V)$ una vecindad de f. Entonces $f(A) \subset V$. Como $f(A)$ es compacto y Y es regular, podemos encontrar una vecindad W tal que

$$f(A) \subset W \subset \overline{W} \subset V.$$

Luego, aplicando la proposición 9.3.2, podemos concluir que

$$f \in M(A, W) \subset \overline{M(A, W)} \subset M(A, \overline{W}) \subset M(A, V),$$

lo cual prueba que $C_c(X, Y)$ es regular. $\square$

Teorema 9.3.7. *Sean X y Y espacios topológicos. Si X es regular, entonces los siguientes dos enunciados se cumplen:*

a) Si Γ es sub-base para la topología de Y, entonces la colección

$$\{M(A, G) \mid A \subset X \text{ compacto, } G \in \Gamma\}$$

es sub-base para $C_c(X, Y)$.

b) Sea $\mathcal{C}$ una familia de subconjuntos compactos de X. Supongamos que para cada compacto $A \subset X$ y para cada vecindad U de A en X, existen compactos $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{C}$ tales que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} C_i \subset U.$$

Entonces la colección

$$\{M(C, G) \mid C \in \mathcal{C}, G \in \Gamma\}$$

es sub-base para $C_c(X, Y)$.

Demostración.

(a) Es suficiente probar que dados $f \in M(A, V) \subset C_c(X, Y)$, con $A \subset X$ compacto y $V \subset Y$ abierto, existen compactos $A_i \subset X$ y abiertos $G_i \in \Gamma$ $i \in \{1, \ldots, n\}$, tales que

$$f \in \bigcap_{i=1}^{n} M(A_i, G_i) \subset M(A, V).$$

Como V es abierto en Y, podemos expresar $V = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha$ donde cada $V_\alpha = \bigcap_{i=1}^{k(\alpha)} G_i^\alpha$, con $G_i^\alpha \in \Gamma$. Además, $f(A) \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha$ y como A es compacto su imagen $f(A)$ también lo es. En consecuencia, existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, tales que

$$f(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{\alpha_i}.$$

Así, $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(V_{\alpha_i})$.

<u>Afirmación.</u> Existen compactos $A_1, \ldots, A_n$, tales que $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ y $A_i \subset f^{-1}(V_{\alpha_i})$.

Para cada $a \in A$ existe α_i, $i = 1, \ldots, n$, tal que $a \in f^{-1}(V_{\alpha_i})$. Como X es regular, podemos encontrar una vecindad U_a de a tal que

$$a \in U_a \subset \overline{U}_a \subset f^{-1}(V_{\alpha_i}).$$

Así, la familia $\{U_a\}_{a\in A}$ es una cubierta abierta del compacto A y por lo tanto podemos extraer una subcubierta finita, digamos $\{U_{a_1},\ldots,U_{a_m}\}$. Notemos que

$$A\subset\bigcup_{i=1}^{m}U_{a_i}\subset\bigcup_{i=1}^{m}\overline{U}_{a_i}.$$

Además, para cada $i=1,\ldots,m$, existe $j\in\{1,\ldots,n\}$, tal que $\overline{U}_{a_i}\subset f^{-1}(V_{\alpha_j})$. Definamos

$$A_j=\bigcup\left\{\overline{U}_{a_i}\cap A\mid \overline{U}_{a_i}\subset f^{-1}(V_{\alpha_j})\right\}.$$

Como A es compacto cada subconjunto cerrado de A $\overline{U_{\alpha-i}}\cap A$ también lo es. Entonces A_j es compacto para todo $i\in\{1,\ldots,m\}$ y además $A=\bigcup\limits_{j=1}^{n}A_j$ y $A_j\subset f^{-1}(V_{\alpha_j})$, lo cual demuestra la afirmación.

Como $f(A_j)\subset V_{\alpha_j}$ para todo $j\in\{1,\ldots,n\}$, se tiene que $f\in\bigcap\limits_{j=1}^{n}M(A_j,V_{\alpha_j})$. Pero $V_{\alpha_j}=\bigcap\limits_{i=1}^{k(\alpha_j)}G_i^{\alpha^j}$, por lo que

$$f\in M\Big(A_j,\bigcap_{i=1}^{k(\alpha_j)}G_i^{\alpha^j}\Big)=\bigcap_{i=1}^{k(\alpha_j)}M(A_j,G_i^{\alpha_j})\ \text{ para todo } j\in\{1,\ldots,n\}.$$

Entonces, tomando en cuenta las fórmulas de la proposición 9.3.2, se obtiene

$$\begin{aligned}f\in\bigcap_{j=1}^{n}\Big(\bigcap_{i=1}^{k(\alpha_j)}M(A_j,G_i^{\alpha_j})\Big)&=\bigcap_{j=1}^{n}\Big(M\big(A_j,\bigcap_{i=1}^{k(\alpha_j)}G_i^{\alpha_j}\big)\Big)=\bigcap_{j=1}^{n}M(A_j,V_{\alpha_j})\\&\subset M\Big(\bigcup_{j=1}^{n}A_j,\bigcup_{j=1}^{n}G_j\Big)\subset M(A,V),\end{aligned}$$

como se quería demostrar.

(b) Por el inciso anterior, tenemos que la colección $\{M(A,G)\mid A\subset X \text{ compacto}, G\in\Gamma\}$ es sub-base para $C_c(X,Y)$. Para demostrar (b) consideremos $f\in C_c(X,Y)$ y un abierto $M(A,G)$, con $G\in\Gamma$, tal que $f\in M(A,G)$. Por hipótesis, existen compactos $C_1,\ldots,C_n\in\mathcal{C}$, tales que

$$A\subset\bigcup_{i=1}^{n}C_i\subset f^{-1}(G).$$

Luego, una vez más por las fórmulas de la proposición 9.3.2, $f \in M\Big(\bigcup_{i=1}^{n} C_i, G\Big) = \bigcap_{i=1}^{n} M(C_i, G) \subset M(A, G)$. Como cada $M(C_i, G) \in \{M(C, G) \mid \ C \in \mathcal{C}, G \in \Gamma\}$, podemos concluir que $\{M(C, G) | C \in \mathcal{C}, G \in \Gamma\}$ es sub-base para la topología compacto-abierta en $C_c(X, Y)$. □

Corolario 9.3.8. *Sean X y Y espacios segundo numerables. Si X es localmente compacto entonces $C_c(X, Y)$ es segundo numerable.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}_1$ una base numerable de X. Como X es localmente compacto también posee una base $\mathcal{B}_2$ de vecindades de cerradura compacta.

Tomando $\mathcal{B}_X = \{B \in \mathcal{B}_1 | B \subset V \text{ para algún } V \in \mathcal{B}_2\}$, es claro que $\mathcal{B}_X$ es base de X, es numerable y $\overline{U}$ es compacto para todo $U \in \mathcal{B}_X$.

Si $A \subset X$ es compacto y $W \subset X$ es una vecindad de A, entonces para cada punto $a \in A$ existe $U_a \in \mathcal{B}_X$ tal que $a \in U_a \subset \overline{U}_a \subset W$. Por lo tanto la colección $\{U_a\}_{a \in A}$ es una cubierta del compacto A. Así, existen $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$, tales que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U}_{a_i} \subset W.$$

Por otro lado, como Y es segundo numerable, existe una base numerable $\mathcal{B}_Y$. Luego, en virtud del teorema 9.3.7 (b), el conjunto

$$\Gamma = \left\{ M(\overline{U}, V) \mid U \in \mathcal{B}_X, V \in \mathcal{B}_Y \right\},$$

es sub-base para la topología compacto-abierta en $C(X, Y)$. Además, Γ es numerable y por lo tanto la base que genera también lo es. De esta manera, podemos concluir que $C_c(X, Y)$ es segundo numerable. □

9.3.1. La Función evaluación en la topología compacto-abierta.

Consideremos tres espacios topológicos X, Y y Z. Notemos que si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son funciones continuas, entonces su composición $g \circ f$ lo es. Así, podemos definir la función composición $T : C_c(X, Y) \times C_c(Y, Z) \to C_c(X, Z)$ por

$$T(f, g) = g \circ f. \tag{26}$$

En las siguientes proposiciones impondremos condiciones a los espacios X, Y y Z para garantizar que la función T sea continua.

Proposición 9.3.9. *Sean X, Y y Z espacios topológicos y T la función definida en (*26). Consideremos $f_0 \in C_c(X, Y)$ y $g_0 \in C_c(Y, Z)$. Entonces los siguientes enunciados se cumplen:

(a) La función $T_{f_0} : C_c(Y,Z) \to C_c(X,Z)$ dada por $T_{f_0}(g) = T(f_0, g)$ es continua.
(b) La función $T_{g_0} : C_c(X,Y) \to C_c(X,Z)$ dada por $T_{g_0}(f) = T(f, g_0)$ es continua.

Demostración. (a) Sea $M(A,V) \subset C_c(X,Z)$ un abierto sub-básico en $C_c(X,Z)$. Notemos que $T_{f_0}(g) = g \circ f_0 \in M(A,V)$ si y sólo si $g(f_0(A)) \subset V$. Pero lo anterior sucede si y sólo si $g \in M(f_0(A), V)$. Luego,

$$T_{f_0}^{-1}(M(A,V)) = M(f_0(A), V).$$

Pero por la continuidad de f_0, $f_0(A)$ es compacto en Y, y por lo tanto $M(f_0(A), V)$ es un abierto sub-básico en $C_c(Y,Z)$, y por consiguiente podemos concluir que T_{f_0} es continua.

(b) Sea $M(A,V) \subset C_c(X,Z)$ un abierto sub-básico en $C_c(X,Z)$. Entonces $T_{g_0}(f) = g_0 \circ f \in M(A,V)$ si y sólo si $g_0(f(A)) \subset V$. Pero lo anterior sucede si y sólo si $f(A) \subset g_0^{-1}(V)$, es decir, siempre y cuando $f \in M(A, g_0^{-1}(V))$. Consecuentemente,

$$T_{g_0}^{-1}(M(A,V)) = M(A, g_0^{-1}(V)),$$

y como g_0 es continua, $g_0^{-1}(V)$ es abierto en X, lo cual prueba que $M(A, g_0^{-1}(V))$ es un abierto sub-básico en $C_c(X,Y)$ y por lo tanto T_{g_0} es continua. □

Proposición 9.3.10. *Sean X y Z espacios de Hausdorff y Y un espacio localmente compacto. Entonces la función composición T definida en (26) es continua.*

Demostración. Sea $(f_0, g_0) \in C_c(X,Y) \times C_c(Y,Z)$ y $M(A,V) \subset C_c(X,Z)$ una vecindad sub-básica de $T(f_0, g_0) = g_0 \circ f_0$ en $C_c(X,Z)$.

Entonces, $g_0(f_0(A)) \subset V$, por lo que $f_0(A) \subset g_0^{-1}(V)$. Por otro lado, como Y es localmente compacto, por el corolario 6.4.4, podemos encontrar un abierto W en Y con cerradura compacta, tal que

$$f_0(A) \subset W \subset \overline{W} \subset g_0^{-1}(V).$$

Así, $f_0 \in M(A,W)$ y $g_0 \in M(\overline{W}, V)$, por lo que el conjunto $O = M(A,W) \times M(\overline{W}, V) \subset C_c(X,Y) \times C_c(Y,Z)$ es una vecindad de (f_0, g_0) en $C_c(X,Y) \times C_c(Y,Z)$. Para completar la prueba, demostremos que $T(O) \subset M(A,V)$.

Sea $(f,g) \in O$. Entonces $f(A) \subset W$ y $g(\overline{W}) \subset V$, por lo que $g(f(A)) \subset V$, y por lo tanto, $g \circ f \in M(A,V)$, como se quería demostrar. □

En las siguientes proposiciones, veremos qué condiciones en X nos garantizan que la función evaluación definida anteriormente, Ω, sea continua.

Proposición 9.3.11. *Sean X y Y espacios topológicos y $x_0 \in X$. Definamos $\Omega_{x_0} : C_c(X,Y) \to Y$ por $\Omega_{x_0}(f) = \Omega(f, x_0)$, donde Ω es la función evaluación. Entonces Ω_{x_0} es continua.*

Demostración. Para verificar este hecho es suficiente observar que para cada abierto $U \subset Y$, $\Omega_{x_0}^{-1}(U) = M(x_0, U)$. Efectivamente, si U es un abierto en Y y $f \in \Omega_{x_0}^{-1}(U)$, entonces $f(x_0) = \Omega_{x_0}(f) \in U$, por lo que $f \in M(\{x_0\}, U)$. Asimismo, si $g \in M(\{x_0\}, U)$, entonces $g(x_0) \in U$, por lo que $\Omega_{x_0}(g) \in U$, como se quería probar. □

Proposición 9.3.12. *Sean X y Y espacios topológicos. Si X es localmente compacto, entonces la función evaluación es continua; es decir, la topología compacto-abierta es admisible.*

Demostración. Sea $(f, x) \in C_c(X, Y) \times X$ y $V \subset Y$ una vecindad de $\Omega(f, x) = f(x)$. Como f es continua y X es localmente compacto, existe un abierto $W \subset X$ tal que $\overline{W}$ es compacto y

$$x \in W \subset \overline{W} \subset f^{-1}(V).$$

Entonces $M(\overline{W}, V)$ es una vecindad sub-básica de f en $C_c(X, Y)$ y por lo tanto $O = M(\overline{W}, V) \times W$ es una vecindad de (f, x) en $C_c(X, Y) \times X$. Para completar la prueba demostremos que $\Omega(O) \subset V$.

Sea $(g, z) \in O$. Entonces $z \in W \subset \overline{W}$ y $g(\overline{W}) \subset V$, por lo que $\Omega(g, z) = g(z) \in V$, como se quería demostrar. □

Si X no es localmente compacto, la proposición anterior es falsa, como veremos a continuación.

Ejemplo 9.3.3. Sean $Y = [0, 1]$ y $X = \mathbb{Q}$. Consideremos la función $f \in C_c(X, Y)$ dada por $f(q) = 0$ para todo $q \in \mathbb{Q}$. Demostraremos que la función evaluación Ω no es continua en (f, r) para cualquier punto $r \in \mathbb{Q}$. Supongamos lo contrario, entonces existe una vecindad U de r en $\mathbb{Q}$ y una vecindad básica $O = \bigcap\limits_{i=1}^{n} M(A_i, U_i)$ de f en $C_c(X, Y)$, tal que

$$\Omega(O \times U) \subset [0, 1).$$

Como $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \subset \mathbb{Q}$ es compacto y U es abierto en $\mathbb{Q}$, se tiene que $U \not\subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ y por lo tanto, existe $p \in \mathbb{Q}$ tal que

$$p \in U \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

Pero $\mathbb{Q}$ es un espacio de Tychonoff, por lo que podemos encontrar una función $g : \mathbb{Q} \to [0, 1]$ tal que

$$g(p) = 1, \text{ y } g(q) = 0 \text{ para todo } q \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

Como U_i es vecindad de 0, (ya que $\{0\} = f(A_i) \subset U_i$) concluimos que $g(A_i) = 0 \in U_i$, es decir, $g \in M(A_i, U_i)$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Luego, $(g, p) \in O \times U$, pero

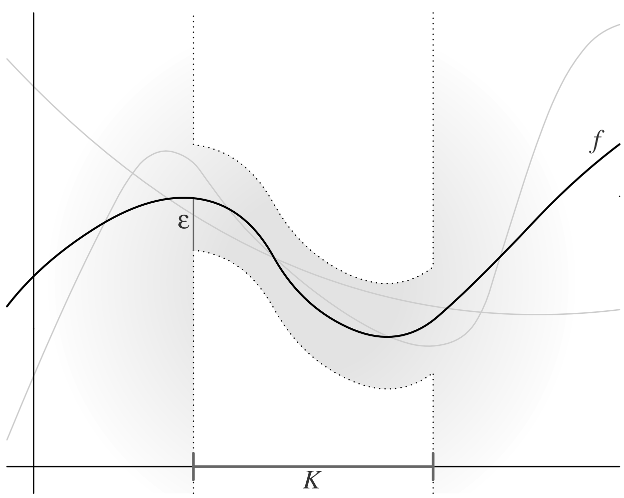
$$\Omega(g, p) = g(p) = 1 \notin [0, 1),$$

lo cual contradice nuestra elección de $O \times U$.

9.3.2. Comparación de la topología compacto-abierta con la topología de convergencia uniforme. Ya hemos observado que la topología compacto-abierta es más fuerte que la topología de la convergencia puntual. Ahora veremos que relación guarda la topología compacto-abierta con la topología de convergencia uniforme. Para esto resultará sumamente útil aprovechar la metrizabilidad del codominio Y para construir una nueva base para $C_c(X, Y)$.

Definición 9.3.13. *Sean X un espacio topológico y (Y, d) un espacio métrico. Consideremos $K \subset X$ un subconjunto compacto y definamos para cada $f \in C(X, Y)$ y cada $\varepsilon > 0$ el conjunto*

$$B(K, f, \varepsilon) = \{g \in C(X, Y) \mid d(f(k), g(k)) < \varepsilon \text{ para todo } k \in K\}.$$



Teorema 9.3.14. *La familia*

$$\mathcal{B} = \{B(K, f, \varepsilon) \mid K \subset X \text{ compacto}, f \in C(X, Y), \varepsilon > 0\}$$

es una base para la topología compacto-abierta en $C(X, Y)$.

Demostración. Sean $K \subset X$ compacto, $f \in C(X,Y)$ y $\varepsilon > 0$. Demostraremos que el conjunto $B(K,f,\varepsilon)$ es abierto en $C_c(X,Y)$.
Sea $g \in B(K,f,\varepsilon)$. Definimos $r = \sup_{k\in K} d(f(k),g(k))$. Ya que K es compacto y tanto f como g son continuas, existe algún $k_0 \in K$ tal que $r = d(f(k_0),g(k_0))$, lo que nos permite concluir que $r < \varepsilon$. De esta forma, haciendo $\delta = \varepsilon - r > 0$ tendremos que $B(K,g,\delta) \subset B(K,f,\varepsilon)$.

Para todo $y \in Y$ definamos $V_y = B(y,\delta/8)$ y $U_y = g^{-1}(V_y)$. La continuidad de g nos garantiza que U_y es abierto y $g^{-1}(\overline{V}_y)$ es cerrado. Así,

$$U_y \subset \overline{U}_y \subset g^{-1}(\overline{V}_y),$$

de donde $g(\overline{U}_y) \subset \overline{V}_y$. Observemos también que para cualquier par de puntos z, w en $g(\overline{U}_y)$ se tiene que $d(z.w) \leq \delta/4$.

Notemos que $\{U_y\}_{y\in Y}$ es una cubierta abierta para X y en particular para el compacto K, por lo que podemos extraer una subcubierta finita $U_{y_1},\ldots,U_{y_n}$ para K. Para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$ sean

$$K_i = \overline{U}_{y_i} \cap K,$$
$$W_i = \{y \in Y \mid d(y, g(\overline{U}_{y_i})) < \delta/4\}.$$

Entonces W_i es una vecindad de $g(\overline{U}_{y_i})$, y en particular del compacto $g(K_i)$. Además, para cualquier par de puntos $z, w \in W_i$ tendremos que

$$d(z,w) \leq 3\delta/4.$$

Por construcción, $g \in \bigcap_{i=1}^{n} M(K_i,W_i)$. Por otro lado, si $h \in \bigcap_{i=1}^{n} M(K_i,W_i)$, dado $k \in K$ existe algún $i \in \{1,\ldots,n\}$ tal que $k \in U_i$. Así, $k \in K_i$ y $h(k) \in W_i$. Como $g(k) \in W_i$, ocurre que $d(g(k),h(k)) \leq 3\delta/4 < \delta$. Esto es cierto para cualquier $k \in K$, lo que nos permite deducir que $h \in B(K,g,\delta)$. Así,

$$g \in \bigcap_{i=1}^{n} M(K_i,W_i) \subset B(K,g,\delta) \subset B(K,f,\varepsilon),$$

por lo que g es un punto interior de $B(K,f,\varepsilon)$. Como la elección de g fue indiscriminada, esto prueba que $B(K,f,\varepsilon)$ es abierto. Ya que $K, f,$ y ε también fueron elegidos arbitrariamente, concluímos que todos los elementos de la familia $\mathcal{B}$ son abiertos.

Ahora consideremos una función arbitraria $f \in C(X,Y)$ y $\bigcap_{i=1}^{n} M(K_i,U_i)$ una vecindad básica de f. Tenemos que para todo $i \in \{1.\ldots,n\}$, en virtud de la compacidad de $f(K_i) \subset U_i$, podemos encontrar $\varepsilon_i > 0$ tal que si $d(x,f(K_i)) < \varepsilon$, entonces $x \in U_i$. Definiendo $\varepsilon = \text{mín}\{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\}$ y

$K = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$ tendremos que si $g \in B(K, f, \varepsilon)$, y $k \in K_i$, entonces $f(k) \in f(K_i)$, por lo que $d(g(k), f(K_i)) \leq d(g(k), f(k)) < \varepsilon \leq \varepsilon_i$, de donde inferimos que $g(k) \in U_i$. Con esto tenemos que

$$f \in B(K, f, \varepsilon) \subset \bigcap_{i=1}^{n} M(K_i, U_i),$$

lo que nos permite concluir que la colección de abiertos $\mathcal{B}$ en efecto constituye una base para $C_c(X, Y)$.

□

Se deriva de esto es que la topología compacto-abierta es en general más burda que la topología de convergencia uniforme, y más aún, cuando el dominio es compacto las topologías de hecho coinciden. Esta última consecuencia la enunciamos como teorema por su importancia.

Corolario 9.3.15. *Sean X un espacio topológico y (Y, d) un espacio métrico con d una métrica acotada. Entonces la topología de la convergencia uniforme generada por d en $C(X, Y)$ es más fina que la topología compacto-abierta en $C(X.Y)$.*

Demostración. Sean $B(K, f, \varepsilon)$ un abierto básico en $C_c(X, Y)$, y $g \in B(K, f, \varepsilon)$. Como en la prueba del teorema anterior, es posible hallar $\delta > 0$ tal que $g \in B(K, g, \delta) \subset B(K, f, \varepsilon)$, y como $K \subset X$, es claro que $B(X, g, \delta) \subset B(K, g, \delta)$. Así,

$$\{h \mid d_*(h, g) < \delta\} = B(X, g, \delta) \subset B(K, g, \delta) \subset B(K, f, \varepsilon).$$

Esto prueba que g es punto interior de $B(K, f, \varepsilon)$ en la topología de convergencia uniforme, lo que queríamos demostrar. □

Teorema 9.3.16. *Sean X un espacio compacto y (Y, d) un espacio métrico. Entonces $C_c(X, Y) = C_u(X, Y)$, es decir la topología compacto abierta coincide con la uniforme en $C(X, Y)$.*

Del teorema anterior, podemos concluir que si X es compacto y Y es metrizable, entonces la topología compacto-abierta en $C(X, Y)$ también es metrizable. Cabe notar que si X no es compacto, la topología compacto-abierta y la de la convergencia uniforme no necesariamente coinciden. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 9.3.4. Sea $X = \mathbb{N}$ y $Y = \{0, 1\}$, ambos con la topología discreta. Por el teorema 9.3.8, $C_c(X, Y)$ es un espacio segundo numerable.

Por otro lado, $C_u(X, Y)$ es un espacio discreto. En efecto, dada $f \in C_u(X, Y)$ se tiene que $d^*(f, g) < 1/2$ si y sólo si $d(f(n), g(n)) < 1/2$ para todo

$n \in \mathbb{N}$. Pero tanto f como g, sólo pueden tomar valores en $\{0, 1\}$, por lo que $d(f(n), g(n)) < 1/2$ si y sólo si $f(n) = g(n)$. Es decir, $d^*(f, g) < 1/2$ si y sólo si $f = g$. En consecuencia, $\{f\}$ es abierto en $C_u(X, Y)$, por lo que $C_u(X, Y)$ es discreto. Entonces toda base de $C_u(X, Y)$ debe contener a $C_u(X, Y)$ mismo visto como la familia de todos sus subconjuntos unipuntuales.

Pero $|C(X, Y)| = |Y^X| = 2^{|\mathbb{N}|} = 2^{\aleph_0}$ por lo que $C_u(X, Y)$ no tiene una base numerable. Esto demuestra que la topología compacto-abierta y la topología discreta en $C(X, Y)$ no coinciden.

Teorema 9.3.17. *Toda topología admisible es más fina que la topología compacto-abierta*

Demostración. Sea τ una topología admisible en $C(X, Y)$ donde X y Y son espacios topológicos. Basta demostrar que todo abierto sub-básico de la topología compacto-abierta está contenido en τ.

Consideremos $A \subset X$ compacto y $V \subset Y$ abierto. Sea $f \in M(A, V)$. Entonces $f(A) \subset V$, por lo que $\Omega(\{f\} \times A) \subset V$. Como τ es admisible, y en virtud del lema 9.3.23, podemos encontrar una vecindad $U_f \in \tau$ de f, tal que $\Omega(U_f \times A) \subset V$.

Claramente, para todo $g \in U_f$, $g(A) = \Omega(\{g\} \times A) \subset V$, por lo que $U_f \subset M(A, V)$. Por lo tanto,

$$M(A, V) = \bigcup_{f \in M(A,V)} U_f \in \tau,$$

lo cual prueba lo que queríamos. $\square$

Sabemos ya que la topología de la convergencia uniforme es admisible, así que este último teorema nos brinda una prueba alternativa de que la topología de la convergencia uniforme es más fina que la topología compacto-abierta.

9.3.3. Convergencia en la topología compacto-abierta. Hemos visto que en la topología punto-abierta, una sucesión de funciones converge si y sólo si converge puntualmente. También comprobamos que en la topología de la convergencia uniforme, una sucesión de funciones converge si y sólo si converge uniformemente. Enseguida estudiaremos que convergencia le corresponde a la topología compacto-abierta.

Definición 9.3.18. *Sean X un espacio topológico y Y un espacio métrico con métrica d. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $C(X, Y)$ y $f \in C(X, Y)$, diremos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en compactos a f, si para todo conjunto* *compacto $K \subset X$ y para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que*

$$d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \text{ para todo } n \geq N \text{ y para todo } x \in K.$$

Como corolario inmediato del teorema 9.3.14 obtenemos la siguiente caracterización:

Teorema 9.3.19. *Sean X un espacio de Hausdorff, (Y, d) un espacio métrico y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $C(X,Y)$, y $f \in C(X,Y)$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en compactos a f.
(b) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en $C_c(X,Y)$.

Definición 9.3.20. *Sean X y Y espacios topológicos. Diremos que una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contenida en $C(X,Y)$ converge continuamente a una función f, si para toda sucesión convergente en X, $x_n \rightsquigarrow x$, la sucesión $(f_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$.*

Teorema 9.3.21. *Sean X un espacio **I**-numerable de Hausdorff, (Y, d) un espacio métrico, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $C(X,Y)$ y $f \in C(X,Y)$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en compactos a f.
(b) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge continuamente a f.

Demostración.
$(b) \Rightarrow (a)$. Supongamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge uniformemente en algún compacto $K \subset X$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $n \geq k$ y $x \in K$ tal que $d\,(f_n(x), f(x)) \geq \varepsilon$. De esta forma podemos encontrar una sucesión estrictamente creciente de números naturales, $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, y una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de puntos en K tal que

$$d(f_{n_K}(x_k), f(x_k)) \geq \varepsilon.$$

Como K es compacto y X **I**-numerable, podemos encontrar un punto $x_0 \in K$ y una subsucesión $(x_{k_m})_{m\in\mathbb{N}}$ que converja a x_0. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a x_0. Por hipótesis $(f_{n_k}(x_k))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x_0)$, entonces existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq N_1$, se cumple que

$$d(f_{n_k}(x_k), f(x_0)) < \varepsilon/2.$$

Por otro lado, como f es continua, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq N_2$, entonces

$$d(f(x_0), f(x_k)) < \varepsilon/2.$$

Sea $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$ y $k \geq N$. Entonces

$$\varepsilon \leq d(f_{n_k}(x_k), f(x_k)) \leq d(f_{n_k}(x_k), f(x_0)) + d(f(x_0), f(x_k)) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en compactos a f.
$(a) \Rightarrow (b)$. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X que converja a un punto $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$. Entonces $K = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{x_0\}$ es un compacto en X, por lo que existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N_1$ se cumple que

$$d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon/2 \text{ para todo } x \in K.$$

Particularmente, tomando $x = x_n$ con $n \geq N_1$, obtendremos que $d\big(f_n(x_n), f(x_n)\big) < \varepsilon/2$ para todo $n \geq N_1$. Por otro lado, como f es continua, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_2$, entonces

$$d(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon/2.$$

Sea $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$. Entonces, si $n \geq N$,

$$d(f_n(x_n), f(x_0)) \leq d(f_n(x_n), f(x_n)) + d(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

lo cual prueba que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge continuamente a f. $\square$

Hemos visto que, por la continuidad de la función evaluación en la topología de la convergencia uniforme, la convergencia uniforme implica convergencia continua. El recíproco no se da, como demuestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 9.3.5. Sean $X = Y = \mathbb{R}^2$, $\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (0, \pi)$ tal que $\theta_n \to 0$. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ ϕ_n es la rotación en torno a $(0, 0)$ por ángulo θ_n, entonces ϕ_n converge continuamente a la identidad, pero no uniformemente.

El que pueda ser definida en ámbitos más generales, y que su convergencia quede completamente caracterizada por la convergencia continua de funciones (cuando tiene sentido hablar de esto), son ventajas indiscutibles de la topología compacto-abierta sobre la topología uniforme que es, en general, demasiado fina para nuestros propósitos.

9.3.4. La función asociada.

Definición 9.3.22. *Sean X, Y y Z espacios topológicos y $\alpha : X \times Y \to Z$ una función continua. Consideremos ahora la función $\widehat{\alpha} : X \to C_c(Y, Z)$ dada por*

$$[\widehat{\alpha}(x)](y) = \alpha(x, y), \text{ para todo } y \in Y.$$

Entonces diremos que α y $\widehat{\alpha}$ son funciones asociadas.

Lema 9.3.23. *Sean X y Y espacios topológicos, $x_0 \in X$ y $A \subset Y$ compacto. Si $W \subset X \times Y$ es una vecindad de $\{x_0\} \times A$, entonces existe una vecindad de x_0, $U \subset X$, tal que $U \times A \subset W$*

Demostración. Para cada $a \in A$, existen vecindades $U_a \subset X$ y $V_a \subset Y$ de x_0 y de a, respectivamente, tales que $U_a \times V_a \subset V$. Entonces la colección $\{V_a\}_{a \in A}$ es una cubierta abierta para el compacto A, y por lo tanto podemos extraer una subcubierta finita, digamos $V_{a_1}, \ldots, V_{a_n}$. Consideremos

$$U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{a_i}.$$

Entonces U es una vecindad de x_0 en X. Además, para todo $a \in A$, $U \times a \subset W$, por lo que $U \times A \subset W$, como se quería demostrar. $\square$

Teorema 9.3.24. *Sean X, Y y Z espacios topológicos y $\alpha : X \times Y \to Z$ una función. Entonces los siguientes enunciados se cumplen.*

(a) Si α es continua, entonces $\widehat{\alpha}$ es continua.
(b) Si $\widehat{\alpha} : X \to C_c(Y, Z)$ es continua y Y es localmente compacto, entonces $\alpha : X \times Y \to Z$ es continua.

Demostración. (a) Sea $M(A, V) \subset C_c(Y, Z)$ un abierto sub-básico. Para demostrar la continuidad de $\widehat{\alpha}$ es suficiente demotrar que $\widehat{\alpha}^{-1}(M(A, V))$ es abierto en X. Sea $x_0 \in \widehat{\alpha}^{-1}(M(A, V))$, entonces $\widehat{\alpha}(x_0) \in M(A, V)$ por lo que

$$[\widehat{\alpha}(x_0)](A) = \alpha(x_0, A) \subset V.$$

Como α es continua, podemos concluir que $\alpha^{-1}(V)$ es una vecindad del compacto $\{x_0\} \times A$ en $X \times Y$. Así, aplicando el lema 9.3.23 podemos encontrar una vecindad $U \subset X$ de x_0 tal que

$$U \times A \subset \alpha^{-1}(V).$$

Para concluir la prueba, basta demostrar que $U \subset \widehat{\alpha}^{-1}(M(A, V))$. En efecto, si $x \in U$, entonces $\{x\} \times A \subset \alpha^{-1}(V)$, por lo que

$$[\widehat{\alpha}(x)](A) = \alpha(x, A) \subset V$$

y por lo tanto $\widehat{\alpha}(x) \in M(A, V)$, como se quería demostrar.

(b) Como $\widehat{\alpha}$ es continua, también lo es el producto $\widehat{\alpha} \times I_Y : X \times Y \to C_c(Y, Z) \times Y$, donde $I_Y : Y \to Y$ denota la función identidad de Y. Además, como Y es localmente compacto, por la proposición 9.3.12 la función evaluación $\Omega : C(Y, Z) \times Y \to Z$ es continua. Luego, $\Omega \circ (\widehat{\alpha} \times I_Y) : X \times Y \to Z$ es una función continua. Pero

$$\Omega \circ (\widehat{\alpha} \times I_Y)(x, y) = \Omega(\widehat{\alpha}(x), y) = [\widehat{\alpha}(x)](y) = \alpha(x, y)$$

para todo par $(x, y) \in X \times Y$, es decir $\alpha = \Omega \circ (\widehat{\alpha} \times I_Y)$, por lo cual podemos concluir que la función α es continua. $\square$

Dados tres espacios topológicos X, Y y Z, podemos definir la función

$$\Lambda : C_c(X \times Y, Z) \to C_c(X, (C_c(Y, Z))$$
$$\Lambda(f) = \widehat{f}$$

Investiguemos la continuidad de esta función.

Lema 9.3.25. *Si X y Y son espacios de Hausdorff y Z es un espacio topológico arbitrario, entonces la familia*

$$\Gamma = \{M(K \times K', U) \mid K \subset X,\, K' \subset Y \text{ compactos, } U \subset Z \text{ abierto}\}$$

es una sub-base para la topología compacto-abierta en $C(X \times Y, Z)$.

Demostración. Por el teorema 9.3.7 es suficiente demostrar que si $L \subset X \times Y$ es compacto, y O es una vecindad de L, entonces existen $K_1, K_2, \ldots, K_n$ subconjuntos compactos de X y $K_1', K_2', \ldots, K_n'$ subconjuntos compactos de Y tales que

$$L \subset \bigcup_{i=1}^{n} K_i \times K_i' \subset O.$$

Sea O una vecindad de L y $\pi_1 : X \times Y \to X$ y $\pi_2 : X \times Y \to Y$ las proyecciones en la primera y segunda coordenada, respectivamente. Entonces $L_1 = \pi_1(L)$ y $L_2\pi_2(L)$ son subconjuntos compactos, por lo que el producto $L_1 \times L_2$ es compacto y Hausdorff, y en consecuencia regular.

Así, para cada punto $(x, y) \in L_1 \times L_2$, existe un conjunto canónico $U_x \times V_y$ abierto en $L_1 \times L_2$ tal que

$$(x, y) \in U_x \times V_y \subset \overline{U}_x \times \overline{V}_y \subset O \cap L_1 \times L_2,$$

donde $\overline{U}_x$ y $overlineV_y$ denotan las cerraduras de U_x y V_y en L_1 y L_2, respectivamente. Como L es compacto, podemos suponer que

$$L \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} \times V_{y_i} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U}_{x_i} \times \overline{V}_{y_i} \subset O,$$

para un número finito de puntos $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $y_1, \ldots, y_n \in Y$. Para caca $i \in \{1, \ldots, n\}$ los conjuntos

$$K_i = \overline{U}_{x_i}$$

y

$$K_i' = \overline{V}_{y_i}$$

son subconjuntos compactos de X y Y respectivamente. Además, es claro que

$$L \subset \bigcup_{i=1}^{n} K_i \times K_i' \subset O,$$

como se quería demostrar. $\square$

Teorema 9.3.26 (Ley exponencial)**.** *Sean X y Y espacios de Hausdorff y Z un espacio topológico arbitrario. Entonces*

1. $\Lambda : C_c(X \times Y \to Z) \to C_c(X, (C_c(Y, Z))$ es un encaje.
2. Si además Y es localmente compacto, entonces Λ es un homeomorfismo.

Demostración. 1. Primero demostremos que la función Λ es inyectiva. En efecto, si $f, g \in C_c(X \times Y, Z)$ y $\widehat{f} = \widehat{g}$, entonces para todo $x \in X$ se tiene que

$$\widehat{f}(x) = \widehat{g}(x).$$

Esto quiere decir que para todo $y \in Y$, $[f(x)](y) = [g(x)](y)$. Equivalentemente, tendríamos que

$$f(x, y) = g(x, y) \text{ para todo } (x, y) \in X \times Y.$$

Así, podemos concluir que $f = g$, y por lo tanto, la función Λ es inyectiva.

Ahora demostremos que Λ es continua. Sean $K \subset X$ y $K' \subset Y$ subconjuntos compactos y $U \subset Z$ un subconjunto abierto. Por la proposición 9.3.7 el conjunto $O = M(K, M(K', U))$ es un sub-básico de $C_c(X, C_c(Y, Z))$. Así, basta probar que $\Lambda^{-1}(O)$ es abierto en $C_c(X \times Y, Z)$. Pero

$$\begin{aligned}
\Lambda^{-1}(O) &= \{f \in C_c(X \times Y, Z) \mid \widehat{f} \in M(K, M(K', U))\} \\
&= \{f \in C_c(X \times Y, Z) \mid \widehat{f}(K) \in M(K', U)\} \\
&= \{f \in C_c(X \times Y, Z) \mid [\widehat{f}(K)](K') \subset U\} \\
&= \{f \in C_c(X \times Y, Z) \mid f(K \times K') \subset U\} \\
&= M(K \times K', U).
\end{aligned}$$

Como $K \times K'$ es compacto el conjunto $M(K \times K', U)$ es abierto en $C_c(X \times Y, Z)$, y por lo tanto, la función Λ es continua.

Por último demostremos que Λ es abierta. Para ello, dado que Λ es inyectiva basta que consideremos un sub-básico de la forma $M(K \times K', U) \subset C_c(X \times Y, Z)$. Denotemos por $\mathrm{Img}\Lambda = \Lambda\big(\mathrm{C_c(X \times Y, Z)}\big)$. Entonces

$$\Lambda\big(M(K \times K', U)\big) = Img\Lambda \cap M\big(K, M(K', U)\big).$$

Pero por el lemma 9.3.25, los abiertos de la forma $M(K \times K', U)$ forman una sub-base para $C_c(X \times Y, Z)$. En consecuencia, podemos concluir que la función $\Lambda : C_c(X \times Y, Z) \to Img\wedge$ es abierta y por lo tanto es un homeomorfismo. Entonces $\Lambda : C_c(X \times Y, Z) \to C_c(X, C_c(Y, Z))$ es un encaje.

2. Sea Y localmente compacto. Para demostrar que Λ es un homeomorfismo, es suficiente probar que Λ es suprayectiva. Si $\phi \in C_c(X, C_c(Y, Z))$

definimos $f : X \times Y \to Z$ por

$$f(x,y) = [\phi(x)](y).$$

Se sigue de la definición que ϕ y f son funciones asociadas. Además, como Y es localmente compacto, por el teorema 9.3.24, se tiene que f es continua. Luego,

$$\widehat{f} = \phi$$

por lo que Λ es suprayectiva, como se quería demostrar. $\square$

Corolario 9.3.27. *Si X y Y son espacios de Hausdorff localmente compactos y Z es un espacio topológico arbitrario, entonces $C_c(X, C_c(Y,Z))$ y $C_c(Y, C_c(X,Z))$ son espacios homeomorfos.*

Demostración. Simplemente notemos que como $X \times Y$ es homeomorfo a $Y \times X$, los espacios $C_c(X \times Y, Z)$ y $C_c(Y \times X, Z)$ también son homeomorfos. Pero por el teorema 9.3.26, $C_c(X \times Y, Z)$ es homeomorfo a $C_c(X, C_c(Y,Z))$ y $C_c(Y \times X, Z)$ es homeomorfo a $C_c(Y, C_c(X,Z))$. Así, podemos concluir que los espacios $C_c(X, C_c(Y,Z))$ y $C_c(Y, C_c(X,Z))$ son homeomorfos entre sí. $\square$

Éste resultado puede extenderse a una clase más general de espacios, como veremos a continuación.

9.4. *k*-espacios

Definición 9.4.1. *Un espacio X se llama k-espacio si un conjunto $A \subset X$ es cerrado si y sólo si $A \cap K$ es cerrado en K para todo conjunto compacto $K \subset X$.*

De la definición se sigue que X es k-espacio si satisface: un conjunto $U \subset X$ es abierto si y sólo si $U \cap K$ es abierto en K para todo subconjunto compacto $K \subset X$.

Proposición 9.4.2. *Todo espacio localmente compacto es un k-espacio.*

Demostración. Sea $U \subset X$ tal que $U \cap K$ es abierto en K para cada compacto $K \subset X$. Mostremos que todo punto $u \subset U$ es punto interior de U.

Escojamos una vecindad V_u de u tal que $\overline{V}_u$ es compacto. Como $U \cap \overline{V}_u$ es abierto en $\overline{V}_u$, inferimos que $U \cap V_u$ es abierto en V_u y por lo tanto en X. Entonces $U \cap V_u$ es una vecindad del punto u en X contenida en U, probando que u es punto interior de U. $\square$

Proposición 9.4.3. *Todo espacio de Hausdorff **I**-numerable es un k-espacio.*

Demostración. Sea $A \subset X$ tal que $A \cap K$ es cerrado en K para todo subconjunto compacto $K \subset X$. Mostremos que $\overline{A} \subset A$. Sea $x \in A$. Como X es **I**-numerable, existe una sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ convergente a x. Entonces el conjunto $C = \{a_1, a_2, \ldots\} \cup \{x\}$ es compacto y es claro que $x \in \overline{A \cap C}$.

Pero $A \cap C$ es cerrado en C y como C es cerrado en X, concluímos qie $A \cap C$ es cerrado en X. De aquí $\overline{A \cap C} = A \cap C$ y por lo tanto $x \in A \cap C$, implicando que $x \in A$. $\square$

Corolario 9.4.4. *Todo espacio metrizable es k-espacio.*

Proposición 9.4.5. *Sean X un k-espacio, y Y cualquier espacio. Entonces una función $f : X \to Y$ es continua si y sólo si la restricción $f|_K : K \to Y$ es continua para todo compacto $K \subset X$.*

Demostración. Sea $A \subset Y$ cerrado. Entonces $f^{-1}(A) \cap K = (f|_K)^{-1}(A)$ es cerrado en K. $\square$

Proposición 9.4.6. *Si $\widetilde{a} : X \to C(Y, Z)$ es continua y $X \times Y$ es un k-espacio, entonces $\alpha : X \times Y \to Z$ es continua.*

Demostración. Sea $B \subset Y$ un conjunto compacto. Demostremos que α es continua en $X \times B$. En efecto, es fácil ver que α es la siguiente composición:

$$X \times B \overset{\widetilde{\alpha}\times \mathrm{Id}}{\to} C(Y,Z) \times B \overset{i\times \mathrm{Id}}{\to} C(B,Z) \times B \overset{\Omega}{\to} Z,$$

donde $i : C(Y, Z) \to C(B, Z)$ es la función restricción en B, esto es $i(f) = f|_B$ para cada $f \in C(Y, Z)$.

Todas estas funciones son continuas, implicando que $\alpha : X \times B \to Z$ también lo es. Esto a su vez implica que α es continua en todo compacto $C \subset X \times Y$. En efecto, sea $p : X \times Y \to Y$ la proyección. Entonces $p(C)$ es compacto, y $C \subset X \times p(C)$. Pero α es continua en $X \times p(C)$, y por lo tanto en C. Por la proposición anterior, se tiene que α es continua. $\square$

Corolario 9.4.7 ((La ley exponencial))**.** *Sean X, Y, Z espacios. Si $X \times Y$ es un k-espacio, entonces $C(X, C(Y, Z))$ es homeomorfo a $C(X \times Y, Z)$.*

9.5. Compacidad en Espacios de Funciones

Definición 9.5.1. *Sea X un espacio topológico y (Y, d) un espacio métrico. Se dice que una familia $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$ es **equicontinua en el punto** $x_0 \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$, existe una vecindad U de x_0 tal que*

$$d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \quad \text{para todo } x \in U, \quad \text{para todo } f \in \mathcal{F}.$$

*Diremos que $\mathcal{F}$ es **equicontinua** si $\mathcal{F}$ es equicontinua en todo punto $x \in X$.*

Se sigue de la definición anterior que los subconjuntos de familias equicontinuas también son familias equicontinuas.

Teorema 9.5.2. *Sea $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$ una familia equicontinua, en donde X es un espacio topológico y (Y, d) un espacio métrico. Entonces la topología compacto-abierta y la topología punto-abierta coinciden en $\mathcal{F}$.*

Demostración. Como siempre, denotemos por p a la topología punto-abierta en $\mathcal{F}$ y por c a la topología compacto-abierta en $\mathcal{F}$. Es claro que $p \subset c$, pues la topología punto-abierta siempre es más débil que la topología compacto-abierta.

Para demostrar la otra contención, recordemos que, según el teorema 9.3.14, los abiertos de la forma

$$B(K, f, \varepsilon) = \{g \in C(X, Y) \mid \sup_{x \in K} d(f(x), g(x)),\ K \subset X \ \text{ compacto}\}$$

constituyen una sub-base para la topología compacto-abierta en $C_c(X, Y)$. Así, es suficiente demostrar que para toda $f \in \mathcal{F}$, $B(K, f, \varepsilon) \cap \mathcal{F}$ es abierto en $\mathcal{F}$ respecto a la topología p.

Como $\mathcal{F}$ es equicontinua, también lo es $B(K, f, \varepsilon) \cap \mathcal{F}$. Por lo tanto, para cada $x \in K$ existe una vecindad U_x de x tal que para todo $y \in U_x$, y para todo $g \in \mathcal{F}$, se cumple que

$$d(g(x), g(y)) < \varepsilon/4.$$

Entonces la colección $\{U_x\}_{x \in X}$ constituye una cubierta abierta del compacto K, por lo que podemos encontrar una subcubierta finita, $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_n}\}$.

Para cada $i = 1, \dots, n$, llamemos V_i a la bola abierta en Y con centro en $f(x_i)$ y radio $\varepsilon/4$. Consideremos $M(x_i, V_i)$. Es claro que $f \in M(x_i, V_i)$, pues $f(x_i) \in V_i$, para todo $i = 1, \dots, n$, por lo que

$$O = \bigcap_{i=1}^{n} M(x_i, V_i) \cap \mathcal{F}$$

es una vecindad de f en la topología p. Para terminar la prueba, es suficiente demostrar que $O \subset B(f, K, \varepsilon)$.

Sea $h \in O$. Entonces $h(x_i) \in V_i$, para todo $i = 1, \dots, n$, por lo que

$$d(h(x_i), f(x_i)) < \varepsilon/4.$$

Para cada $x \in K$, existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $x \in U_{x_j}$. Entonces

$$d(f(x), f(x_j)) < \varepsilon/4.$$

Además, como $h \in O \subset \mathcal{F}$, se tiene que

$$d(h(x), h(x_j)) < \varepsilon/4.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} d(h(x), f(x)) &\leq d(h(x), h(x_j)) \ + \ d(h(x_j), f(x_j)) \ + \ d(f(x_j), f(x)) \\ &< \ \varepsilon/4 \ + \ \varepsilon/4 \ + \ \varepsilon/4 \\ &= \ 3\varepsilon/4. \end{aligned}$$

Así, podemos concluir que

$$\sup_{x\in K} d(h(x), f(x)) \leq 3\varepsilon/4 < \varepsilon,$$

lo cual prueba que $h \in B(f, K, \varepsilon)$, como se quería demostrar. $\square$

Teorema 9.5.3. *Sea $\mathcal{F} \subset C_p(X,Y)$ una familia equicontinua, en donde X es un espacio topológico y Y un espacio métrico. Entonces $\overline{\mathcal{F}} \subset C_p(X,Y)$ también es equicontinua.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y $x_0 \in X$. Como $\mathcal{F}$ es equicontinua, existe una vecindad U de x_0 tal que para todo $x \in X$ y para toda $f \in \mathcal{F}$, $d(f(x_0), f(x)) < \varepsilon/4$. Sea $g \in \overline{\mathcal{F}} \subset C_p(X,Y)$ y $x \in U$. Entonces

$$M = M\big(x_0, B(g(x_0)), \varepsilon/4\big) \cap M\big(x, B(g(x), \varepsilon/4)\big)$$

es una vecindad de g en $C_p(X,Y)$. Luego, como $g \in \overline{\mathcal{F}}$, podemos asegurar que existe $f \in \mathcal{F} \cap M$. Entonces $f(x_0) \in B(g(x_0), \varepsilon/4)$, y $f(x) \in B(g(x), \varepsilon/4)$ por lo que

$$d(f(x_0), g(x_0)) < \varepsilon/4 \ \text{ y } \ d(f(x), g(x)) < \varepsilon/4.$$

Por otro lado, como $x \in U$, se cumple que

$$d(f(x_0), f(x)) < \varepsilon/4.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} d(g(x_0), g(x)) &\leq d(g(x_0), f(x_0)) \ + \ d(f(x_0), f(x)) \ + \ d(f(x), g(x)) \\ &< \varepsilon/4 + \varepsilon/4 + \varepsilon/4 \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Así, podemos concluir que para todo $\varepsilon > 0$ y para todo $x_0 \in X$, existe una vecindad U de x_0 tal que para todo $h \in \overline{\mathcal{F}}$ y para todo $x \in U$, se cumple que $d(h(x), h(x_0)) < \varepsilon$. Por lo tanto, $\overline{\mathcal{F}}$ es equicontinua. $\square$

De los dos teoremas anteriores, tenemos el siguiente corolario:

Corolario 9.5.4. *Sea $\mathcal{F} \subset C_p(X,Y)$ una familia equicontinua, en donde X es un espacio topológico y Y un espacio métrico, denotemos por $[\mathcal{F}]_p$ la cerrradura de $\mathcal{F}$ en $C_p(X,Y)$ y por $[\mathcal{F}]_c$ la cerrradura del mismo conjunto en $C_c(X,Y)$. Entonces $[\mathcal{F}]_p = [\mathcal{F}]_c$*

Demostración. Observamos que $[\mathcal{F}]_c \subset [\mathcal{F}]_p$ siempre se cumple ya que la topología compacto-abierta es más fuerte que la topología punto-abierta. Ahora bien, sea $g \in [\mathcal{F}]_p$. Entonces para toda vecindad de g en la topología punto-abierta U, se tiene que $U \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$.

Considérese una vecindad W de g en la topología compacto-abierta. Como $[\mathcal{F}]_p$ es equicontinua entonces del teorema 9.5.2 se sigue que existe U' vecindad de g en la topología punto-abierta tal que

$$W \cap [\mathcal{F}]_p = U' \cap [\mathcal{F}]_p.$$

Consecuentemente

$$W \cap \mathcal{F} = (W \cap [\mathcal{F}]_p) \cap \mathcal{F} = (U' \cap [\mathcal{F}]_p) \cap \mathcal{F} = U' \cap \mathcal{F} \neq \emptyset.$$

Pero W era arbitraria, luego $g \in [\mathcal{F}]_c$, y por lo tanto $[\mathcal{F}]_p = [\mathcal{F}]_c$, como se quería demostrar. □

Teorema 9.5.5 (Arzela-Ascoli)**.** *Sea X un espacio de Hausdorff, (Y, d) un espacio métrico, y $\mathcal{F} \subset C_c(X, Y)$ un subconjunto. Entonces la cerradura $\overline{\mathcal{F}} \subset C_c(X, Y)$ es compacta si se satisfacen los siguientes enunciados:*

(1) $\mathcal{F}$ es equicontinuo.

(2) Para todo $x \in X$, el conjunto $\mathcal{F}_x = \{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\} \subset Y$ tiene cerradura compacta en Y.

Además, si X es localmente compacto, entonces el recíproco es cierto.

Demostración. Supongamos que se cumplen (1) y (2) y demostremos que $\overline{\mathcal{F}}$ es compacto. Sea $Y_x = Y$ para cada $x \in X$ y consideremos cada punto $x \in X$ la función:

$$\Omega_x : C_p(X, Y) \to Y$$

definida como $\Omega_x(f) = f(x)$, para cualquier $f \in C_p(X, Y)$.

Con esto, es claro que $\mathcal{F}_x = \Omega_x(\mathcal{F})$, y además por ser $\mathcal{F}$ equicontinua $[\mathcal{F}]_p$ también lo es, y del corolario anterior se tiene que $\overline{\mathcal{F}} = [\mathcal{F}]_p$. Debido a la continuidad de Ω_x para todo $x \in X$

$$\Omega_x(\overline{\mathcal{F}}) = \Omega_x(\overline{\mathcal{F}}^p) \subset \overline{\Omega_x(\mathcal{F})} = \overline{\mathcal{F}_x}$$

lo que nos permite definir, que tomando la restricción de Ω_x en $\overline{\mathcal{F}}$ definimos

$$\varphi : \overline{\mathcal{F}} \to \prod_{x \in X} \overline{\mathcal{F}_x} \subset Y^X$$

como $\varphi(f) = (\Omega_x|_{\overline{\mathcal{F}}}(f))_{x \in X} = (f(x))_{x \in X}$ para cada $f \in \overline{\mathcal{F}}$. Observemos que dado que en $\overline{\mathcal{F}}$ se tiene la topología de la convergencia puntual, φ es precisamente la restricción a $\overline{\mathcal{F}}$ del encaje $\phi : C_p(X, Y) \to Y^X$ definido en el teorema 9.1.3. Así, φ es también un encaje. Dado que $\prod_{x \in X} \overline{\mathcal{F}_x}$ es compacto y se tiene que $\varphi(\overline{\mathcal{F}})$ es cerrado, necesariamente $\varphi(\overline{\mathcal{F}})$ es compacto. Por lo tanto $\overline{\mathcal{F}}$ es compacto.

Ahora supongamos que X es localmente compacto y demostremos el recíproco. Supongamos que $\overline{\mathcal{F}}$ es compacto.

(1) Sean $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$. Como X es localmente compacto, existe una vecindad U de x_0 tal que $\overline{U}$ es compacto. Consideremos la función restricción $\xi : C_c(X,Y) \to C_c(\overline{U},Y)$ dada por

$$\xi(f) = f|_{\overline{U}}.$$

En el teorema 9.3.14 se demostró que ξ es continua, por lo que $\xi(\overline{\mathcal{F}})$ es compacto en $C_c(\overline{U},Y)$. Además, como $\overline{U}$ es compacto, por el teorema 9.3.16 $C_c(\overline{U},Y)$ es metrizable. Así, el conjunto $\xi(\overline{\mathcal{F}})$ es totalmente acotado. De este modo, podemos encontrar funciones $f_1, \ldots, f_n \in \overline{\mathcal{F}}$ tales que

$$\xi(\overline{\mathcal{F}}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(\xi(f_i), \varepsilon/4), \tag{27}$$

donde $B(\varphi, r)$ denota la bola abierta de radio r centrada en $\varphi \in C_c(\overline{U},Y)$.

Luego, como cada f_i es continua en x_0, podemos encontrar una vecindad U_i de x_0, tal que $U_i \subset U \subset \overline{U}$ y de manera para que para todo $x \in U_i$, se cumple

$$d(f_i(x_0), f_i(x)) < \varepsilon/4. \tag{28}$$

Sea $O = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$. Entonces para todo $x \in O$ y para toda $i = 1, \ldots, n$, se cumple (28). Por otro lado, de (27) se sigue que para cada $f \in \mathcal{F}$ existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\xi(f) \in B(\xi(f_j), \varepsilon/4)$, es decir,

$$\sup_{y \in \overline{U}} d(f(y), f_j(y)) < \varepsilon/4. \tag{29}$$

En particular, para todo $x \in O \subset \overline{U}$ tendremos:

$$\begin{aligned} d(f(x), f(x_0)) &\leq d(f(x), f_j(x)) \ + \ d(f_j(x), f_j(x_0)) \ + \ d(f_j(x_0), f(x_0)) \\ &< \varepsilon/4 \ + \ \varepsilon/4 \ + \ \varepsilon/4 \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

lo cual prueba que $\mathcal{F}$ es una familia equicontinua.

(2). Como $\overline{\mathcal{F}}$ es compacto, entonces para cada $x \in X$, $\Omega_x(\overline{\mathcal{F}}) \subset Y$ es compacto. Pero $\mathcal{F}_x = \Omega_x(\mathcal{F}) \subset \Omega_x(\overline{\mathcal{F}})$ y por lo tanto $\overline{\mathcal{F}}_x \subset \Omega_x(\overline{\mathcal{F}})$ es compacto para cada $x \in X$. □

9.6. Ejercicios del capítulo

1. Demuestra que para cualesquiera dos espacios topológicos X y Y, y para todo $x_0 \in X$, la función $\Omega_{x_0} : C_p(X,Y) \to Y$ dada por $\Omega_{x_0}(f) = f(x_0)$ es continua.

2. Sean X y Y espacios topológicos. Demuestra las siguientes afirmaciones:
   a) Si Y es Hausdorff, entonces $C_p(X, Y)$ es Hausdorff.
   b) Si Y es regular, entonces $C_p(X, Y)$ es regular.
   c) Si Y es Tychonoff, entonces $C_p(X, Y)$ es Tychonoff.

3. Supongamos que X y Y son espacios topológicos. Además, supongamos que Y es segundo numerable. Demuestra que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C(X, Y)$ es una sucesión de funciones que converge puntualmente a una función f, entonces existe un conjunto $A \subset X$ tal que $f|_{X\setminus A}$ es continua, y A es denso en ninguna parte. Recuerda que un conjunto A es denso en ninguna parte si $\text{Int}(\overline{A}) = \emptyset$.

4. Sea F un espacio topológico finito. Demuestra que los espacios $C_u(F, \mathbb{R})$ y $C_p(F, \mathbb{R})$ son homeomorfos.

5. Demuestra que $C^*(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ no es separable.

6. Demuestra que si X es un espacio métrico separable, entonces existe un encaje isométrico $j : X \to C^*(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

7. De un ejemplo en el que se muestre que el recíproco de 9.3.2-c no es cierto.

8. Sea X un espacio topológico discreto y Y un espacio topológico arbitrario. Demuestra que $C_c(X, Y)$ es homeomorfo al producto topológico $\prod_{x\in X} Y_x$, en donde $Y_x = Y$, para toda $x \in X$.

9. Da un ejemplo de un espacio Y normal, y de un espacio topológico X tal que $C_c(X, Y)$ no sea normal.

10. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $C_c(X, Y)$ que converge uniformemente en compactos a una función f. Demuestra que $f|_K$ es continua para cada $K \subset X$ subconjunto compacto.

11. Si Y es un espacio de Hausdorff, demuestra que el encaje $h : Y \to C_c(X, Y)$ es cerrado.

12. Demuestra la proposición 9.2.2.

13. Sea X un espacio topológico y (Y, d) un espacio métrico. Supongamos que $\{f_n : X \to Y\}$ es una familia de funciones continuas tales que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en la topología compacto-abierta de $C(X, Y)$ a una

función $f \in C(X,Y)$. Demuestra que para todo $\varepsilon > 0$ y para todo $x_0 \in X$, existe una vecindad U_{x_0} de x_0 y un $N_0 \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \geq N_0$ y para todo $x \in U_{x_0}$ se cumple que $d(f_n(x), f_n(x_0)) < \varepsilon$.

14. *a*) Demuestra que la función identidad $I : C(X,Y) \to C(X,Y)$ es la función asociada de la función evaluación.
    b) Concluye que τ es una topología admisible para $C(Y,Z)$ si y sólo si para todo espacio X y para toda función $\alpha : X \times Y \to Z$, la continuidad de $\widehat{\alpha} : X \to (C(Y,Z),\tau)$ implica la continuidad de α.

15. Sea $f : X \to Y$ una función continua entre dos espacios topológicos. Consideremos otro espacio Z y $T_f : C_c(Y,Z) \to C_c(X,Z)$ la función definida en la proposición 9.3.9. Demuestra que si f es suprayectiva, entonces T_f es inyectiva.

16. Sean X y Y espacios topológicos. Si X es compacto y Y es segundo numerable, demuestra que $C_c(X,Y)$ es metrizable si y sólo si Y es regular (sugerencia: usa el Teorema de metrizabilidad de Urysohn).

17. Sean X y Y espacios topológicos. Demuestra que si Y es Hausdorff, entonces $\{(f,x,y) \mid f(x) = y\}$ es cerrado en $C_c(X,Y) \times X \times Y$

18. Sean X y Y espacios topológicos. Considera $A \subset Y$ un conjunto cerrado. Si X es localmente compacto, prueba que $\{(f,x) \mid f(x) \in A\}$ es cerrado en $C_c(X,Y) \times X$.

19. Sea X un espacio compacto y Y un espacio topológico arbitrario. Si $U \subset X$ es abierto en X y $A \subset Y$ es cerrado en Y, demuestra que
    a) $\{(f,y) \mid f^{-1}(y) \in U\}$ es abierto en $C_c(X,Y) \times Y$.
    b) $\{f \mid f^{-1}(A) \subset U\}$ es abierto en $C_c(X,Y)$.

20. Demuestra que si X es un espacio topológico, entonces para todo $q \in \mathbb{N}$, el espacio $BC_u(X,\mathbb{R}^q)$ es completo (aquí $\mathbb{R}^q$ esta provisto de la métrica usual).

21. Sea X es un espacio topológico compacto y consideremos $\mathbb{R}^q$ provisto de la métrica usual. Demuestra que una familia $\mathcal{F} \subset C_u(X,\mathbb{R}^q)$ tiene cerradura compacta si y sólo si $\mathcal{F}$ es equicontinua y uniformemente acotada.
    Recuerda que $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada si y sólo si $\sup\{\|f(x)\| | x \in X, f \in \mathcal{F}\} < \infty$.

22. Sea $\mathcal{F} \subset C_c(\mathbb{R}^q, \mathbb{R})$ una familia equicontinua, uniformemente acotada. Demuestra que existe una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ que converge uniformemente en compactos a una función $f \in C_c(\mathbb{R}^q, \mathbb{R})$.

23. Si (X, d) y son espacios métricos, $M > 0$ y $\alpha > 0$, se define el conjunto $\mathrm{Lip}(\alpha, M)$ como el conjunto de todas las funciones continuas de X en $\mathbb{R}$ tales que

$$|f(x) - f(y)| \leq Md(x, y)^\alpha \quad \text{para todo par de puntos } x, y \in X.$$

Demuestra que si $X = [0, 1]$ provisto de la métrica usual y $\alpha > 1$, entonces $\mathrm{Lip}(\alpha, 1)$ contine únicamente funciones constantes.

24. Demuestra que si (X, d) es un espacio métrico compacto y $x_0 \in X$ es un punto fijo, entonces para todo $\alpha \in (0, 1]$ y para todo $M > 0$, el conjunto $\{f \in \mathrm{Lip}(\alpha, M) | \; |f(x_0)| \leq M\}$ es compacto en $C_u(X, \mathbb{R})$.

Capítulo 10

Acciones de grupos

10.1. Acciones de grupos en conjuntos y espacios

Definición 10.1.1. *Sean G un grupo y X un espacio topológico. Dotemos además a G de la topología discreta. Una* ***acción*** *de G en X es una función continua $\theta : G \times X \to X$ (donde denotaremos $\theta(g, x)$ simplemente como gx) que satisface:*

1. *$g(hx) = (g \cdot h)x \ \forall x \in X,\ \forall g, h \in G$, donde $\cdot$ es la operación de G.*
2. *$ex = x \ \forall x \in X$, donde e es el elemento neutro de G.*

Al espacio X junto con la acción de G se le denomina G-espacio.

Ejemplos 10.1.1.

1. Cualquier grupo G actúa en cualquier espacio X de manera trivial haciendo $gx = x \forall g \in G, \forall x \in X$
2. $G = \mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$, actúa en $X = \mathbb{S}^n$ mediante la multiplicación usual: $-1 \cdot x = -x$.
3. $G = \mathbb{Z}$ actúa en $X = \mathbb{R}$ por traslaciones enteras: $n \cdot x = n + x$.
4. $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ actúa en $X = \mathbb{R}^2$ por $(m, n) \cdot (x, y) = (m + x, n + y)$.
5. $G = \mathbb{Z}$ actúa en $X = \{(x,) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}\}$ por $m \cdot (x, y) = (m + x, (-1)^m y)$.
6. Si X es un grupo y $G \subset X$ un subgrupo, G actúa en X por traslaciones izquierdas: $g \cdot x = gx$.
7. Si además $H \subset X$ es subgrupo, G actúa en las clases laterales derechas X/H por las mismas traslaciones: $g \cdot xH = gxH$.

En este contexto, cada elemento g del grupo actuante induce una transformación del espacio X en sí mismo $\widetilde{g} : X \to X$ dada por $\widetilde{g}(x) = gx$. Esta transformación resulta ser un homeomorfismo, como se demuestra enseguida. A a ésta función se le suele llamar la **traslación** inducida por g.

Proposición 10.1.2. *Sea X un G-espacio. Para cada $g \in G$, la traslación $\tilde{g} : X \to X$ es un homeomorfismo.*

Demostración. En primer lugar $\widetilde{g}$ es continua por ser la composición del encaje $h_g : X \to G \times X$ dado por $h_g(x) = (g, x)\ \forall x \in X$, seguido de la acción $\theta : G \times X \to X$. De la definición de acción se sigue que para todo $g, h \in G$ se tiene que $\widetilde{g \circ h} = \widetilde{g} \circ \widetilde{h}$, y además $\widetilde{e} = \mathrm{Id}_X$, así $\widetilde{g} \circ \widetilde{g^{-1}} = \widetilde{g \circ g^{-1}} = \widetilde{e} = \mathrm{Id}_X$ y anánogamente $\widetilde{g^{-1}} \circ \tilde{g}$, de donde $\widetilde{g^{-1}}$ es la inversa de $\widetilde{g}$, y es a su vez continua por las mismas razones esgrimidas arriba. Podemos concluir que $\widetilde{g}$ es un homeomorfismo, como buscábamos demostrar. $\square$

Cabe resaltar aquí que del claro hecho de que para todo $g, h \in G$ se tiene que $\widetilde{g \cdot h} = \widetilde{g} \circ \tilde{h}$ y de la proposición anterior se desprende que la asociación $: G \to \mathrm{Homeo}(X)$, dada por $(g) = \widetilde{g}$ es de hecho un homomorfismo, donde $\mathrm{Homeo}(X)$ es el grupo de homeomorfismos de X en sí mismo, con la composición como operación. Esta observación nos permite llegar a la siguiente

Definición 10.1.3. *La acción de G en X se llama **efectiva** si el homomorfismo es un monomorfismo. En otras palabras, si $\widetilde{g} = \mathrm{Id}_X$ implica que $g = e$.*

Definición 10.1.4. *Una acción de G en X se denomina **libre** si $\forall g \in G \backslash \{e\}$ y $x \in X$ se tiene que $gx \neq x$.*

Es claro que toda acción libre es efectiva, pero existen numerosos ejemplos de acciones efectivas que no son libres.

Ejemplo 10.1.2. Sea $X = \mathbb{C}$ el plano complejo y $G = \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ la circunferencia unitaria vista como subespacio del plano complejo. Consideremos la acción de $\mathbb{S}^1$ en C dada por la multiplicación usual $(z, w) \mapsto zw$. Esta acción es libre pues para $z_1 \neq z_2 \in \mathbb{S}^1$, $\widetilde{z_1}(1) = z_1 \cdot 1 = z_1 \neq z_2 = z_2 \cdot 1 = \widetilde{z_2}(1)$, por lo que $\widetilde{z_1} \neq \widetilde{z_2}$ y así el homomorfismo ˜es inyectivo. Sin embargo, para todo $z \in \mathbb{S}^1$, se tiene que $z \cdot 0 = 0$, por lo que la acción no puede ser libre.

Definición 10.1.5. *sea X un G-espacio y $x \in X$. El conjunto $G(x) = \{gx \mid g \in G\}$ se llama **órbita** de x.*

Proposición 10.1.6. *Si $G(x) \cap G(y) \neq \emptyset$, entonces $G(x) = G(y)$. Esto es, las órbitas costituyen una partición para X.*

Demostración. Supongamos que $G(x) \cap G(y) \neq \emptyset$. Entoces existen g_1 y g_2 en G tales que $g_1 x = g_2 y$. Se sigue que $g_1^{-1}(g_1 x) = g_1^{-1}(g_2 y)$ y por tanto $x = (g_1^{-1} \cdot g_2)y$, de donde $x \in G(y)$. Además, para todo $gx \in G(x)$, $gx = (g \cdot g_1^{-1} \cdot g_2)y \in G(y)$, y en consecuencia $G(x) \subset G(y)$. Análogamente puede verificarse que $G(y) \subset G(x)$. $\square$

Definición 10.1.7. *La asociación $p : X \to X/G = \{G(x) \mid x \in X\}$ dada por $p(x) = G(x)$ se conoce como* ***proyección orbital*** *y el conjunto X/G dotado de la topología cociente respecto a la proyección orbital es el* ***espacio de órbitas****.*

Teorema 10.1.8. *Sea X un G-espacio. Entonces la proyección orbital $p : X \to X/G$ es una función continua y abierta.*

DEMOSTRACIÓN.

1. p es continua por la definición de topología cociente.
2. Verifiquemos que es abierta. Sea $V \subset X$ abierto. Entonces $p(V)$ es abierto sí y sólo si $p^{-1}(p(V))$ lo es. Ahora bien, se tiene que

$$\begin{aligned} p^{-1}(p(V)) &= \{x \in X \mid p(x) \in p(V)\} \\ &= \{x \in X \mid \exists v \in V \text{tal que} p(x) = p(v)\} \\ &= \{x \in X \mid \exists v \in V \text{tal que} G(x) = G(v)\} \\ &= \bigcup_{v \in V} G(v) \\ &= \cup\{gv \mid g \in G, v \in V\} \\ &= \bigcup_{g \in G} \widetilde{g}(V) \end{aligned}$$

Como V es abierto y $\widetilde{g}$ es homeomorfismo, $\widetilde{g}(V)$ es abierto ara todo $g \in G$, luego $\bigcup\limits_{g \in G} \widetilde{g}(V) = p^{-1}(p(V))$ es abierto, y consecuentemente p(V) es abierto.

□

1. $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{S}^1$.
2. $\mathbb{S}^n/\mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{R}P^n$.
3. $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cong \mathbb{T}^2$.
4. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}\}/\mathbb{Z} \cong M^2$, la banda de Möbius.

10.2. Acciones propiamente discontinuas

Definición 10.2.1. *Sean G un grupo y X un G-espacio. Decimos que X es* ***propiamente discontinuo*** *si cada $x \in X$ tiene una vecindad V tal que $gV \cap g'V = \emptyset$ para cualesquiera elementos distintos $g, g' \in G$. En estas condiciones, se dirá que V es una vecindad* ***delgada*** *de x.*

Nota. Toda acción propiamente discotinua es libre; el recíproco es falso.

Teorema 10.2.2. *Sea X un G-espacio propiamente discontinuo. Entonces la proyección orbital $p : X \to X/G$ es una función cubriente.*

Demostración. Sean $x \in X$ un punto cualquiera y U su vecindad delgada. Como p es abierta, $p(U)$ es una vecindad de la órbita $G(x) = p(x) \in X/G$. Además,

$$p^{-1}(p(U)) = \bigcap_{g \in G} gU$$

y $\{gU \mid g \in G\}$ es una familia disjunta por la elección de U. Claramente las restricciones $p|_{gU} : gU \to p(U)$ son homeomorfismos. □

Ejemplos.

1. $\mathbb{R}$ es un $\mathbb{Z}$-espacio propiamente discontinuo: para $x \in \mathbb{R}$, $(x - \frac{1}{3}, x + \frac{1}{3})$ es una vecindad delgada. La proyección orbital $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ coincide con la función cubriente $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$.
2. $\mathbb{S}^n$ es un $\mathbb{Z}_2$-espacio propiamente discontinuo: para $x \in \mathbb{S}^n$, $\{y \mid \|y - x\| < \frac{1}{2}\}$ es una vecindad delgada. La proyección orbital $\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n/\mathbb{Z}_2$ coincide con la función cubriente $\mathbb{S}^n \to \mathbb{R}P^n$.

Teorema 10.2.3. *Sean G un grupo finito y X un G-espacio libre de Hausdorff. Entonces X es propiamente discontinuo.*

Demostración. Supongamos que $G = \{1 = g_0, g_1, \dots, g_n\}$ y $x \in X$. Entonces los distintos puntos $x = 1x, g_1x, \dots, g_nx$ tienen vecindades mutuamente ajenas $U_j,\ j = 0, \dots, n$. Sea $U = \bigcap_j g_j^{-1} U_j$ que es vecindad de X. Entonces para cada g_i,

$$g_iU = \bigcap_j g_i(g_j^{-1}U) \subset U_i$$

por lo que

$$g_iU \cap g_jU = g_j(g_j^{-1}g_iU \cap U) = g_j^{-1}(g_kU \cap U)$$

donde $g_k = g_j^{-1}g_i$. Pero $g_kU \subset U_k$ y $U \subset U_0$ de modo que

$$g_iU \cap g_jU \subset g_j^{-1}(U_k \cap U_0) = \emptyset \quad \text{si } g_k \neq 1$$

y esto último sucede si y solo si $g_i \neq g_j$. Esto termina la demostración. □

Teorema 10.2.4. *Sea X un G-espacio conexo por trayectorias provisto de una acción propia del grupo G. Sean $x_0 \in X$ y $y_0 = p(x_0) \in X/G$ donde $p : X \to X/G$ es la proyección orbital. Entonces hay un homomorfismo del grupo fundamental $\pi(X/G, y_0)$ al grupo G.*

Demostración. Sea $[\alpha] \in \pi(X/G, y_0)$. Como $p : X \to X/G$ es una funció cubriente, existe un único levantamiento $\widetilde{\alpha} : I \to X$ del lazo $\alpha \in \Omega(X/G, y_0)$ tal que $\widetilde{\alpha}(0) = x_0$. De este modo $\widetilde{\alpha}(1) \in p^{-1}(y_0) = G(x_0)$ por lo que hay un $g \in G$ tal que

$$\widetilde{\alpha}(1) = gx_0$$

De hecho, al ser X un G-espacio libre, este g es único. Denotemos entonces a g por $g_{[\alpha]}$ y definamos $\xi : \pi(X/G, y_0) \to G$ como

$$\xi([\alpha]) = g_{[\alpha]}.$$

Verifiquemos que ξ es homomorfismo de grupos. Dados $[\alpha], [\beta] \in \pi(X/G, y_0)$, sean $\widetilde{\alpha}$ y $\widetilde{\beta}$ los únicos levantamientos de α y β respectivamente que empiezan en x_0. Consideremos entonces la trayectoria en X

$$\psi = \widetilde{\alpha} * g_{[\alpha]}\widetilde{\beta}$$

Es claro que

$$p\psi = (p\widetilde{\alpha}) * (p(g_{[\alpha]}\widetilde{\beta}) = \alpha * \beta$$

y $\psi(0) = x_0$. Así que ψ es el único levantamiento de $\alpha * \beta$ que comienza en x_0, ie. $\psi = \widetilde{\alpha * \beta}$. Por consecuente,

$$\psi(1) = g_{[\alpha]}\widetilde{\beta}(1) = g_{[\alpha]}(g_{[\beta]}x_0) = g_{[\alpha][\beta]}x_0$$

Por otro lado, $\psi(1) = \widetilde{\alpha * \beta}(1) = g_{[\alpha*\beta]}x_0 = g_{[\alpha][\beta]}x_0$ por lo que

$$\xi([\alpha][\beta]) = g_{[\alpha][\beta]} = g_{[\alpha][\beta]} = \xi([\alpha])\xi([\beta])$$

como se quería demostrar. □

Proposición 10.2.5. *El núcleo del homomorfismo $\xi : \pi(X/G, y_0) \to G$ es $p_*(\pi(X, x_0)$.*

Demostración. Sea $[\alpha] \in \pi(X/G, y_0)$ tal que $\xi([\alpha]) = 1$. Entonces $\widetilde{\alpha}(1) = x_0$ donde $\widetilde{\alpha}$ es el levantamiento de α que empieza en x_0. Tenemos entonces que $\widetilde{\alpha} \in \Omega(X, x_0)$ y $p\widetilde{\alpha} = \alpha$. Esto implica que

$$[\alpha] = p_*([\widetilde{\alpha}]) \in p_*(\pi(X/G, y_0))$$

. □

Corolario 10.2.6. *Sea X un espacio conexo por trayectorias. Entonces $\pi(X/G, y_0)/p_*(\pi(X, x_0))$ y G son isomorfos.*

Demostración. Basta ver que $\xi : \pi(X/G, y_0) \to G$ es suprayectiva. Sea entonces $g \in G$. Sea α_g una trayectoria de x_0 a gx_0 en X. Entonces $[p\alpha_g] \in \pi(X/G, y_0)$ y por la definición de ξ tenemos

$$\xi([p\alpha_g])x_0 = \widetilde{p\alpha_g}(1)$$

donde $\widetilde{p\alpha_g}$ es el levantamiento de $p\alpha_g$ que empieza en x_0. Este levantamiento es sin embargo es también α_g, por consiguiente

$$\xi([p\alpha_g])x_0 = \alpha_g(1) = gx_0$$

de donde $\xi([p\alpha_g]) = g$. $\square$

Corolario 10.2.7. *Si X es simplemente conexo entonces $\pi(X/G, y_0) \cong G$.*

Teniendo estas herramientas, el siguiente paso natural es reconstruir espacios de interés conocidos como espacios de órbitas bajo una acción propiamente discontinua, para así poder calcular sus grupos fundamentales. El siguiente lema resuelve una situación que encontraremos en algunos ejemp'los interesantes.

Lema 10.2.8. *Sean X un G-espacio tal que X/G es de Hausdorff, y A un subconjunto compacto de X tal que $G(A) = X$. Si en A está definida una función cociente $q : A \to Z$ con las mismas fibras que la proyección orbital (i.e. $q(a_1) = q(a_2)$ si y sólo si $G(a_1) = G(a_2)$), entonces Z es homeomorfo a X/G.*

Demostración. Tenemos que $p|_A$,la restricción de la proyección orbital en A, es constante en las fibras de q, que es una identificación. Por el teorema de transgresión, existe una única función $f : Z \to X/G$ tal que $f \circ q = p|_A$, y esta función además resulta continua. Ésta función está dada por $f(q(a)) = G(a)$, y es claro por nuestras hipoótesis que además es biyectiva. Se tiene además que A es compacto y X/G es de Hausdorff, por lo que f además es cerrada, y por lo tanto, un homeomorfismo.

$\square$

Ejemplo 10.2.1.

1. $\pi(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$
2. Sean $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ los homeomorfismos
$$\varphi(z) = z + i \quad \text{y} \quad \psi(z) = \overline{z} + i$$
Entonces $\psi\varphi = \varphi^{-1}\psi$. Si $G = \{\varphi^m\psi^n \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$, entonces G es un grupo que actúa propiamente en $\mathbb{C}$ y $\mathbb{C}/G$ es homeomorfo a la botella de Klein.
3. Sea $\xi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^5$ dada por
$$\xi(x + iy) = (\cos 2\pi y, \cos 4\pi x, \sin 4\pi x, \sin 2\pi y \cos 2\pi x, \sin 2\pi x \cos 2\pi y) -$$
Entonces ξ es un G-invariante, y $\mathbb{C}/G \cong \varphi(\mathbb{C})$.
4. Sea $\chi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ la función dada como $\chi(p, q, r, s, t) = ((p+2)q, (p+2)r, s, t)$. Demostrar que la restricción $\chi|_{\varphi(\mathbb{C}} : K^2 \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ es un encaje.

5. Sea $X = \mathbb{R}\times[0,1] \subset \mathbb{C}$. Si $T : X \to X,\ z \mapsto \overline{z}+i$ y $G = \{T^n\,|\,n \in \mathbb{Z}\}$, probar que X es un G-espacio y $X/G \cong M^2$. En particular, $\pi(M^2) = \mathbb{Z}$.
6. Sean $G = \mathbb{Z}_p$ y $\mathbb{S}^3 = \{(z : 1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$. Sea q relativamente simple con p. Sea $h : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$,
$$h(z_1, z_2) = (e^{\frac{2\pi i}{p}} z_1, e^{\frac{2\pi iq}{p}} z_2)$$
Entonces h es un homeomorfismo con $h^p = 1$. Sea $n \cdot (z_1, z_2) = h^n(z_1, z_2)$ para $n \in \mathbb{Z}_p$. Esta acción es propia y el espacio de órbitas $\mathbb{S}^3/\mathbb{Z}_p$ se llama **espacio de lentes** ó $L(p, q)$. En particular $L(2, 1) = \mathbb{R}P^3$.

De igual forma $\mathbb{Z}_p$ actúa en $\mathbb{S}^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$

Capítulo 11

Grupo Fundamental

En este capítulo introduciremos la noción de homotopía entre dos funciones para desarrollar el importante concepto de *grupo fundamental*. Como veremos más adelante, el grupo fundamental no sólo será una poderosa herramienta que nos ayudará a determinar, en algunos casos, cuando dos espacios no son homeomorfos, sino que nos va permitir demostrar teoremas importantes dentro de las matemáticas, como son el Teorema Fudamental del Álgebra y el Teorema de Brower, entre otros.

A lo largo del capítulo denotaremos por I al intervalo cerrado $[0, 1]$.

11.1. Trayectorias homotópicas

Comencemos por definir qué es una *homotopía*.

Definición 11.1.1. *Sean X y Y dos espacios topológicos y $f, g : X \to Y$ dos funciones continuas. Una* ***homotopía*** *entre f y g es una función continua $H : X \times I \to Y$, tal que*

i) $H(x, 0) = f(x)$
ii) $H(x, 1) = g(x)$

para todo punto $x \in X$. En este caso diremos que f y g son funciones ***homotópicas*** *y lo denotaremos por $f \simeq g$ o $H : f \simeq g$. Además, denotaremos por $H_t : X \to Y$ la función dada por*

$$H_t(x) = H(x, t).$$

Ejemplo 11.1.1. Sea X un espacio topológico y $f, g : X \to \mathbb{R}^2$ dos funciones continuas. La función $H : X \times I \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$H(x, t) = tg(x) + (1 - t)f(x)$$

define una homotopía entre f y g.

11.1.1. Homotopías Relativas.

Un caso particular de las funciones homotópicas, son las funciones homtópicas relativas a un conjunto dado.

Definición 11.1.2. *Sean X y Y espacios topológicos, $A \subset X$ un subconjunto arbitrario y $f, g : X \to Y$ dos funciones continuas. Se dice que f es* ***homotópica a*** *g* ***relativo a*** *A (denotado $f \simeq g$, rel A o $f \simeq_A g$), si $f(a) = g(a)$ para todo $a \in A$, y existe una homotopía $H : X \times I \to Y$ entre f y g tal que*

$$H(a,t) = f(a) = g(a), \text{ para todo } a \in A.$$

En este caso diremos que H es una homotopía relativa a A entre f y g.

Ejemplo 11.1.2. Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y $A \subset X$ un subconjunto arbitrario. Si Y es un espacio topológico arbitrario y $f, g : Y \to X$ son funciones continuas tales que $f(a) = g(a)$ para todo $a \in A$, entonces f y g son homotópicas relativas a A. En efecto, la función $H : Y \times I \to X$ dada por

$$H(x,t) = tf(x) + (1-t)g(x),$$

es una homotopía entre f y g relativa a A.

A continuación demostraremos un pequeño lema que nos será de gran utilidad en las demostraciones siguientes.

Lema 11.1.3. *Sean X y Y espacios topológicos y $A, B \subset X$ dos subespacios cerrados tales que $X = A \cup B$. Supongamos que $f : A \to Y$ y $g : B \to Y$ son funciones continuas tales que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A \cap B$. Entonces la función $h : X \to Y$ dada por*

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in A, \\ g(x), & \text{si } x \in B. \end{cases}$$

está bien definida y es continua.

Demostración. Es claro que h está bien definida. Demostremos su continuidad. Sea $G \subset Y$ cerrado en Y, entonces

$$\begin{aligned} h^{-1}(G) &= \{x \in X \mid h(x) \in G\} \\ &= \{x \in A \mid f(x) \in G\} \cup \{x \in B \mid g(x) \in G\} \\ &= f^{-1}(G) \cup g^{-1}(G). \end{aligned}$$

Como f y g son continuas, $f^{-1}(G)$ y $g^{-1}(G)$ son cerrados en A y en B, respectivamente. Pero A y B son cerrados en X, entonces $f^{-1}(G)$ y $g^{-1}(G)$ son cerrados en X, y por lo tanto su unión también es un cerrado en X. Así queda demostrado que h es continua. □

Proposición 11.1.4. *Sean X y Y dos espacios topológicos y $A \subset X$. La relación $\simeq_A$ es una relación de equivalencia en $C(X,Y)$.*

DEMOSTRACIÓN. Probaremos que $\simeq_A$ es reflexiva, simétrica y transitiva, construyendo las homotopías respectivas.

1. Reflexividad. Dada $f : X \to Y$ continua, la función $H : X \times I \to Y$ dada por $H(x,t) = f(x)$ es una homotopía relativa a A entre f y f.
2. Simetría. Si f y g son dos funciones de X en Y homótopas relativas a A, entones hay una homotopía relativa a A, $H : X \times I \to Y$ tal que

   $$H(x,0) = f(x), \quad H(x,1) = g(x) \quad \text{y} \quad H(a,t) = f(a) = g(a)$$

   para todo $t \in I$ y para todo $a \in A$. De esta manera, la función $G : X \times I \to Y$ dada por

   $$G(x,t) = H(x, 1-t)$$

   es una función continua. Además,

   $$G(x,0) = H(x,1) = g(x), \quad G(x,1) = H(x,0) = f(x)$$
   $$\text{y} \quad G(a,t) = H(a,1-t) = f(a) = g(a)$$

   para todo $t \in I$ y para todo $a \in A$.

   Entonces G es una homotopía relativa a A entre g y f.
3. Transitividad. Sean f, g y h funciones contínuas de X en Y tales que $f \simeq_A g$ y $g \simeq_A h$. Entonces, $f(a) = g(a)$ y $g(a) = h(a)$ para todo $a \in A$, por lo que $f(a) = h(a)$ para todo $a \in A$. Por otro lado, existen $H_1, : X \times I \to Y$ una homotopía entre f y g relativa a A, y $H_2 : X \times I \to Y$ una homotopía entre g y h relativa a A. Definamos $H : X \times I \to Y$ de la siguiente manera

   $$H(x,t) = \begin{cases} H_1(x, 2t), & \text{si } t \in [0, 1/2], \\ H_2(x, 2t-1), & \text{si } t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

   Por el lema 11.1.3, la función H es continua. Veamos que es una homotopía entre f y h. Por un lado, $H(x,0) = H_1(x,0) = f(x)$ y $H(x,1) = H_2(x,1) = h(x)$. Por otro lado, como H_1 y H_2 son homotopías relativas a A, entonces para todo $t \in I$ y para todo $a \in A$, se tiene que

   $$H_1(a,t) = f(a) = g(a) = h(a) = H_2(a,t).$$

   Así, podemos concluir que H es una homotopía entre f y h relativa a A.

$\square$

Particularmente, si f y g son trayectorias entre dos puntos x_0 y x_1 de un espacio topológico X, diremos que f y g son *homotópicas relativas a* $\{0,1\}$, si existe una homotopía $H : I \times I \to X$ entre f y g, tal que para todo $t \in I$,

$$H(0,t) = f(0) = g(0) = x_0$$

y

$$H(1,t) = f(1) = g(1) = x_1.$$

11.1.2. Tipo Homotópico.

Definición 11.1.5. *Se dice que dos espacios topológicos X y Y son* ***homotópicamente equivalentes*** *o tienen el mismo* ***tipo homotópico*** *si existen funciones $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ tales que $g \circ f \simeq \mathrm{Id_X}$ y $f \circ g \simeq \mathrm{Id_Y}$.*

Ejemplo 11.1.3. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ es homotópicamente equivalente a $\mathbb{S}^{n-1}$. En efecto, Si $r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{S}^{n-1}$ está definida por

$$r(x) = \frac{x}{\|x\|},$$

y $j : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ es la función inclusión. Entonces $r \circ j = 1_{\mathbb{S}^{n-1}}$. Por otro lado, $j \circ r$ es homotópica a la identidad en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mediante la homotopía

$$H : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times I \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

dada por

$$H(x,T) = t\frac{x}{\|x\|} + (1-t)x.$$

Por lo tanto, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y $\mathbb{S}^{n-1}$ son homotópicamente equivalentes.

Claramente si dos espacios son homeomorfos, entonces también son homotópicamente equivalentes. Sin embargo, es fácil encontrar espacios que no sean homeomorfos, pero que sean homotópicamente equivalentes.

Ejemplo 11.1.4. $\mathbb{R}^n$ es homotópicamente equivalente a $\{0\}$. En efecto, consideremos $i : \{0\} \to \mathbb{R}^n$ la inclusión, y $f : \mathbb{R}^n \to \{0\}$ la constante 0. Entonces $f \circ i = Id_{\{0\}}$, en tanto que $i \circ f$ es homotópica a la identidad en $\mathbb{R}^n$ mediante

$$H : \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n$$

dada por

$$H(x,t) = tx.$$

Así, $\mathbb{R}^n$ es homotópicamente equivalente a $\{0\}$, pero claramente estos espacios no son homeomorfos, pues no existe una biyección entre ellos. Cabe aclarar aquí que el ejemplo anterior también ilustra esta situación ($\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y $\mathbb{S}^{n-1}$ son espacios homotópicos que no son homeomorfos, pero en este momento aún no tenemos herramientas para ofrecer una prueba simple de que no existe un homoemorfismo entre ellos).

Si X y Y son dos espacios homotópicamente equivalentes, lo denotaremos por $X \simeq Y$. Como veremos a continuación, la relación $\simeq$ es una relación de equivalencia en la clase de los espacios topológicos. Antes de demostrar esto, probemos el siguiente lema.

Lema 11.1.6. *Sean X, Y y Z espacios topológicos. Consideremos $f, g : X \to Y$ y $\psi, \varphi : Y \to Z$ funciones continuas entre estos espacios. Entonces los siguientes enunciados se cumplen:*

1. *Si $f \simeq g$, relativo a A ($A \subset X$) entonces $\varphi \circ f \simeq \varphi \simeq g$ relativo a A.*
2. *Si $\varphi \simeq \psi$ relativo a B ($B \subset Y$) entonces $\varphi \circ f \simeq \psi \circ f$ relativo a $f^{-1}(B)$.*

Demostración. 1. Sea $G : X \times I \to Y$ una homotopía entre f y g relativo a A tal que

$$G_0 = f, \quad \text{y} \quad G_1 = g.$$

Entonces la función continua $H : X \times I \to Z$ dada por

$$H_t = \varphi \circ G_t$$

es una homotopía ente $\varphi \circ f$ y $\varphi \circ g$. Además, como G es una homotopía relativa a A, se tiene que para todo $a \in A$, y para todo $t \in I$, $G_t(a) = f(a) = g(a)$. Así,

$$H_t(a) = \varphi(G_t(a)) = \varphi(f(a)) = \varphi(g(a)),$$

por lo que H es una homotopía entre $\varphi \circ f$ y $\varphi \circ g$ relativo a A.

2. Sea $F : Y \times I \to Z$ una homotopía ente φ y ψ relativa a B tal que

$$F_0 = \varphi, \quad \text{y} \quad F_1 = \psi.$$

Entonces la función continua $J : X \times I \to Z$ dada por

$$J_t = F_t \circ f$$

es una homotopía ente $\varphi \circ f$ y $\psi \circ f$. Además, como F es una homotopía relativa a B, se tiene que para todo $b \in B$, y para todo $t \in I$, $F_t(b) = \varphi(b) = \psi(b)$. Así, si $x \in f^{-1}(B)$, entonces $f(x) \in B$, por lo que

$$J_t(x) = F_t(f(x)) = \varphi(f(x)) = \psi(f(x)), \quad \text{para todo } t \in I.$$

De este modo, podemos concluir que J es una homotopía relativa a $f^{-1}(B)$, entre $\varphi \circ f$ y $\psi \circ f$. □

Teorema 11.1.7. *La relación $\simeq$ es una relación de equivalencia en la clase de todos los espacios topológicos.*

Demostración. Es claro que $\simeq$ es una relación reflexiva y simétrica. Demostremos que también es transitiva.

Sean X, Y y Z espacios topológicos tales que $X \simeq Y$ y $Y \simeq Z$. Entonces existen funciones continuas $f : X \to Y$, $g : Y \to X$, $\varphi : Y \to Z$ y $\psi : Z \to Y$, tales que $g \circ f \simeq 1_X$, $f \circ g \simeq 1_Y$, $\psi \circ \varphi \simeq 1_Y$ y $\varphi \circ \psi \simeq 1_Z$.

Consideremos las funciones $\varphi \circ f : X \to Z$ y $g \circ \psi : Z \to Y$. Por el lema anterior, tenemos que

$$(g \circ \psi) \circ (\varphi \circ f) = (g \circ (\psi \circ \varphi)) \circ f \simeq g \circ 1_Y \circ f = g \circ f.$$

Pero $g \circ f \simeq 1_X$, de donde podemos concluir que $(g \circ \psi) \circ (\varphi \circ f) \simeq 1_X$.

Análogamente,

$$(\varphi \circ f) \circ (g \circ \psi) = \varphi \circ (f \circ g) \circ \psi \simeq \varphi \circ 1_Y \circ \psi = \varphi \circ \psi.$$

Como $\varphi \circ \psi \simeq 1_Z$ podemos concluir que $(\varphi \circ f) \circ (g \circ \psi) \simeq 1_Z$. Así, queda demostrado que X y Z son homotópicamente equivalentes. □

Así, la relación $\simeq$ divide a la clase de todos los espacios topológicos en clases de quivalencia. Si X es un espacio topológico, denotaremos su clase de equivalencia por

$$[X] = \{Y | Y \simeq X\}.$$

11.1.3. Espacios contraibles.

Definición 11.1.8. *Se dice que un espacio topológico X es* ***contraible*** *si $1_X \simeq f_c$, donde f_c es la función constante $f_c : X \to \{c\}$, i.e. $f_c(x) = c$ para todo $x \in X$.*

Ejemplo 11.1.5. $\mathbb{R}^n$ es contraible. En efecto, la función $H : \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$H_t(x) = tx,$$

es una homotopía entre la identidad en $\mathbb{R}^n$ y la función constante 0.

Ejemplo 11.1.6. Si $X \subset \mathbb{R}^n$ es un subconjuto convexo, entonces X es contraible. Para cualquier punto $c \in X$, la función $H : X \times I \to X$ dada por

$$H_t(x) = tx + (1 - t)c$$

define una homotopía entre 1_X y la función constante $f_c : X \to X$.

Teorema 11.1.9. *Sea X un espacio topológico. X es contraible si y sólo si $X \simeq \{*\}$, donde $\{*\}$ es el espacio topológico formado por un sólo punto.*

Demostración. Primero supongamos que X es contraible y demostremos que $X \simeq *$. Sea $f : X \to *$ la función dada por $f(x) = *$. Fijemos un punto $x_0 \in X$, y definamos $c : * \to X$ por $c(*) = x_0$. Demostremos que $c \circ f \simeq 1_X$ y que $f \circ c \simeq 1_*$. Notemos que $c \circ f = \zeta_{x_0} : X \to x_0$, donde $\zeta_{x_0}(x) = x_0$. Como X es contraible, $\zeta_{x_0} \simeq 1_X$, así que $c \circ f \simeq 1_X$. Por otro lado $f \circ c = 1_*$, y por tanto $f \circ c \simeq 1_*$. Entonces, X es homotópicamente equivalente a $*$.

Ahora supongamos que X y $*$ son homotópicamente equivalentes. Entonces existen funciones $f : X \to *$ y $g : * \to X$ tales que $g \circ f \simeq 1_X$ y $f \circ g \simeq 1_*$. Claramente, la única función posible f, es la función constante c definida anteriormente. De igual manera, $g(*) = x_0$ para algún $x_0 \in X$. Así, $g \circ f$ es una función constante homotópica a la identidad. En otras palabras, X es contraíble. $\square$

Proposición 11.1.10. *Sea Z un espacio contraíble. Entonces, para todo espacio X, para cualesquiera dos funciones $f, g : X \to Z$, f y g son homotópicas.*

Demostración. Como Z es contraible, existe una función constante $c : Z \to Z$, tal que 1_Z y c son homtópicas. Por el lema 11.1.6, $f = 1_Z \circ f$ es homotópica a $c \circ f$. Análogamente, g es homotópica a $c \circ g$. Pero $c \circ g = c \circ f$, por lo que f y g son homotópicas, como se quería demostrar. $\square$

11.2. El producto de trayectorias

Definición 11.2.1. *Sea X un espacio topológico. Si $f : I \to X$ es una trayectoria de x_0 a x_1 y $g : I \to X$ es una trayectoria de x_1 a x_2, definimos el* producto *$f * g$ de f y g como la trayectoria de x_0 a x_2 dada por*

$$f * g(t) = \begin{cases} f(2t), & si t \in [0, 1/2], \\ g(2t-1), & si t \in [1/2, 1]. \end{cases} \tag{30}$$

La continuidad de $f * g$ es una consecuensia inmediata del lema 11.1.3.

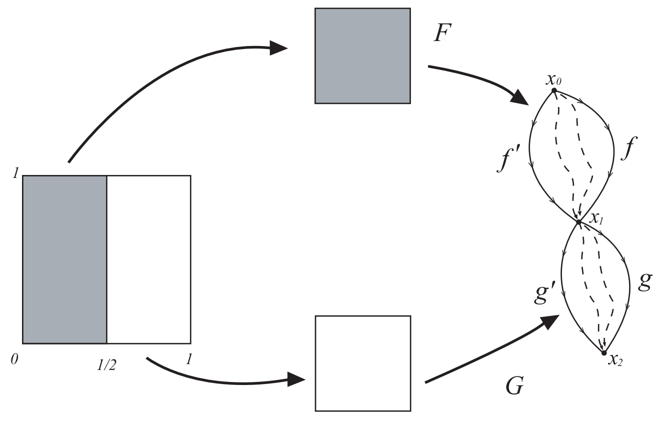
Lema 11.2.2. *Sean X un espacio topológico. Si $f, f' : I \to X$ son trayectorias homotópicas entre x_0 y x_1 y $g, g' : I \to X$ son trayectorias homotópicas entre x_1 y x_2, entonces*

$$f * g \sim f' * g'.$$

Demostración. Como $f \sim f'$, existe una homotopía entre f y f' relativa a $\{0, 1\}$, digamos $F : I \times I \to X$. Análogamente, como $g \sim g'$, existe $G : I \times I \to X$, una homotopía entre g y g', relativa a $\{0, 1\}$.

Definamos $H : I \times I \to X$ por

$$H(s, t) = \begin{cases} F(2s, t), & \text{si } s \in [0, 1/2], \\ G(2s-1, t), & \text{si } s \in [1/2, 1]. \end{cases}$$



Como $F(1,t) = x_1 = G(0,t)$, la función H está bien definida y es continua. Veamos que también es una homotopía entre $f * g$ y $f' * g'$, relativa a $\{0,1\}$. Tenemos que $H(0,t) = F(0,t) = x_0$, y $H(1,t) = G(1,t) = x_2$. Por otro lado,

$$H(s,0) = \begin{cases} F(2s,0), & \text{si } s \in [0,1/2] \\ G(2s-1,0), & \text{si } s \in [1/2,1]. \end{cases} = \begin{cases} f(2s), & \text{si } s \in [0,1/2] \\ g(2s-1), & \text{si } s \in [1/2,1]. \end{cases} = f{*}g(s).$$

Así, $H(s,0) = f * g(s)$. Análogamente se demustra que $H(s,1) = f' * g'(s)$, lo cual completa la demostración. □

Lema 11.2.3. *Sea $f : I \to X$ una trayectoria de x_0 a x_1. Si $\alpha : I \to I$ es una finción continua con $\alpha(0) = 0$ y $\alpha(1) = 1$, entonces $f\alpha \sim f$.*

Demostración. Definamos a homotopía $H : I \times I \to X$ como

$$H(s,t) = f((1-t)s + t\alpha(s)).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} H(s,0) &= f(s) \\ H(s,1) &= f(\alpha(s)) = (f\alpha)(s) \\ H(0,t) &= f(0) \quad \text{y} \quad H(1,t) = f(1) \end{aligned}$$

De donde concluimos que H es la homotopía relativa entre f y $f\alpha$ buscada. □

En otras palabras, este lema dice que cualquier reparametrización de una trayectoria es homotópica a la trayectoria original.

Lema 11.2.4. *Sean X un espacio topológico, $f, g, h : I \to X$ tres trayectorias en X tales que $f(0) = x_0$, $f(1) = g(0) = x_1$, $g(1) = h(0) = x_2$ y*

$h(1) = x_3$. *Entonces*

$$(f * g) * h \simeq f * (g * h) \text{ relativo a } \{0, 1\}.$$

Demostración. Escribamos las funciones $(f * g) * h$ y $f * (g * h)$.

$$(f*g)*h(s) = \begin{cases} f * g(2s), & \text{si } s \in [0, 1/2], \\ h(2s-1), & \text{si } s \in [1/2, 1]. \end{cases} = \begin{cases} f(4s), & \text{si } s \in [0, 1/4], \\ g(4s-1), & \text{si } s \in [1/4, 1/2], \\ h(2s-1), & \text{si } s \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

$$f*(g*h)(s) = \begin{cases} f(2s), & \text{si } s \in [0, 1/2], \\ g * h(2s-1), & \text{si } s \in [1/2, 1]. \end{cases} = \begin{cases} f(2s), & \text{si } s \in [0, 1/2], \\ g(4s-2), & \text{si } s \in [1/2, 3/4], \\ h(4s-3), & \text{si } s \in [3/4, 1]. \end{cases}$$

Sea $\rho : I \to I$ la función continua, dada por

$$\rho(s) = \begin{cases} s/2 & \text{si } s \in [0, 1/2], \\ s - 1/4, & \text{si } s \in [1/2, 3/4], \\ 2s - 1, & \text{si } s \in [3/4, 1]. \end{cases}$$

Por el lema anterior funciones, $(f * g) * h$ y $\big((f * g) * h\big)\rho$ son homotópicas. Pero $\big((f * g) * h\big)\rho = f * (g * h)$, por lo que $(f * g) * h \sim f * (g * h)$. □

Para cada $x \in X$, denotemos por $e_x : I \to X$ la trayectoria dada por $e_x(t) = x$, para todo $t \in X$.

Lema 11.2.5. *Sean X un espacio topológico y $f : I \to X$ una trayectoria entre dos puntos x_0 y x_1. Entonces $e_{x_0} * f \sim f$ y $f * e_{x_1} \sim f$.*

Demostración. Para demostrar que $e_{x_0} * f \simeq f$, notemos que

$$e_{x_0} * f(s) = \begin{cases} x_0, & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2, \\ f(s), & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1, \end{cases} = f(\rho(s)),$$

donde la función $\rho : I \to I$ está dada por

$$\rho(s) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2, \\ 2s - 1, & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1, \end{cases}$$

Por el lema11.2.3, se tiene que las funciones $f \circ \rho$ y f son hotmotópicas relativo a $\{0, 1\}$. De este modo, concluimos que $e_{x_0} * f$ y f son funciones homotópicas relativo a $\{0, 1\}$. Análogamente se demuestra que f y $f * e_{x_1}$ son homotópicas relativo a $\{0, 1\}$. Los detalles quedan como ejercicio al lector.

□

Dada una trayectoria $f : I \to X$, con extremos en x_0 y en x_1, se define la trayetoria *inversa* $\overline{f} : I \to X$ de la siguiente manera:

$$\overline{f}(s) = f(1-s).$$

Notemos que $\overline{f}$ es una trayectoria de x_1 a x_0 que recorre el mismo *camino* que f, pero en sentido inverso. Además, $\overline{\overline{f}} = f$. En efecto, $\overline{\overline{f}}(s) = \overline{f}(1-s) = f(1-(1-s)) = f(s)$.

Lema 11.2.6. *Sea X un espacio topológico y $f, g : I \to X$ dos trayectorias homotópicas entre dos puntos x_0 y x_1. Entonces $\overline{f} \simeq \overline{g}$ relativo a $\{0,1\}$.*

Demostración. Como f y g son trayectorias homotópicas, existe una homotopía de trayectorias $F : I \times I$ entre f y g. Entonces $F(s,0) = f(s)$, $F(s,1) = g(s)$, $F(0,t) = x_0$ y $F(1,t) = x_1$ Definamos $H : I \times I$ de la siguiente manera

$$H(s,t) = F(1-s,t).$$

Entonces H es una función continua. Veamos que es una homotopía relativa a $\{0,1\}$. En efecto, tenemos $H(0,t) = F(1,t) = x_1$; $H(1,t) = F(0,t) = x_0$; $H(s,0) = F(1-s,0) = f(1-s) = \overline{f}(s)$; y $H(s,1) = F(1-s,1) = g(1-s) = \overline{g}(s)$. Por lo tanto H es la homotopía deseada. □

Lema 11.2.7. *Sean X un espacio topológico y $f : I \to X$ una trayectoria entre dos puntos x_0 y x_1. Entonces $f * \overline{f} \simeq e_{x_0}$ relativo a $\{0,1\}$ y $\overline{f} * f \simeq e_{x_1}$ relativo a $\{0,1\}$.*

Demostración. Para demostrar que $f * \overline{f} \simeq e_{x_0}$ consideremos la función $H : I \times I \to X$, dada por

$$H(s,t) = \begin{cases} f\left(2s\right), & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{t}{2}, \\ f(t), & \text{si } \frac{t}{2} \leq s \leq 1 - \frac{t}{2}, \\ f(2(1-s)), & \text{si } s \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Si $s = \frac{t}{2}$, entonces $f(2s) = f(t)$ y si $s = 1 - \frac{t}{2}$ entonces $f(2(1-s)) = f(t)$, por lo que H está bien definida y por el lema 11.1.3 podemos concluir que H es continua. Demostremos que es una homotopía relativa a $\{0,1\}$.

Tenemos $H(0,t) = f(0) = x_0$. Si $s = 1$, entonces $H(1,t) = f(0) = x_0$. Por otro lado, si $t = 0$, entonces $H(s,0) = f(0) = e_{x_0}(s)$. Y si $t = 1$, entonces $H(s,1) = f * \overline{f}(s)$.

Consecuentemente, H es una homotopía entre e_{x_0} y $f * \overline{f}$, relativa a $\{0,1\}$. Para demostrar que $\overline{f} * f \simeq e_{x_1}$, recordemos que $\overline{\overline{f}} = f$. Así, tenemos que

$$e_{x_1} \simeq \overline{f} * \overline{\overline{f}} = \overline{f} * f.$$

Por lo tanto la prueba está completa. □

11.3. Grupo Fundamental

Recordemos que un grupo es una terna $(G, e, *)$ en donde G es un conjunto, $e \in G$ un elemento distinguido, llamado *neutro* y $*$ es una operación

$$* : G \times G \to G$$

cuya imagen $*(a, b)$ denotamos por $= a * b$ o simplemente ab cuando no hay otras operaciones en G. La *multiplicacioón* $*$ y el neutro e satisfacen a su vez las siguientes propiedades:

(a) $*$ es asociativa, esto es, $(a*b)*c = a*(b*c)$, para cualesquiera $a, b, c \in G$.
(b) $a * e = e * a = a$ para cualquier $a \in G$.
(c) Para todo $a \in G$ existe otro elemento $a^{-1} \in G$ tal que $a^{-1}*a = a*a^{-1} = e$. Este elemento es único y se llaman *inverso* de a.

Ejemplos conocidos de grupos son:

- El sistema de los números enteros $\mathbb{Z}$ con la suma como operación y el cero como neutro.
- El sistema de los números reales $(\mathbb{R}, 0, +)$.

Aquí a operación satisface además la condición $a * b = b * a$. Los grupos con esta propiedad se llaman *abelianos*. No todos los grupos son abelianos:

- Los grupos de matrices invertibles $GL(n)$ por ejemplo, forman un grupo no abeliano con la multiplicación usual de matrices como operación.
- Los grupos de (algunas) funciones biyectivas en ciertos conjuntos forman grupos por lo general no abelianos bajo la composisción usual de funciones.

En nuestro caso, el producto $f * g$ de trayectorias hará las veces de la operación en un grupo. En efecto, si X es un espacio topológico, la relación $\simeq$ (relativo a $\{0, 1\}$) induce una partición en clases de equivalencia en el conjuto $C(I, X)$. Denotemos por

$$[f] = \{g \in C(I, X) \mid g \simeq f\}.$$

Si f es una trayectoria entre x_0 y x_1, y g es una trayectoria entre x_1 y x_2, la operación $f * g$ definida en la ecuación (30) se extiente a las clases de equivalencia de $C(I, X)$ como sigue:

$$[f] \cdot [g] = [f * g].$$

Por el Lema 11.2.2, esta operación queda bien definida, sin embargo, tiene la desventaja de que cualesquiera dos trayectorias f y g en X no siempre se pueden operar. Para remediar esta situación consideramos trayectorias cuyos puntos inicial y final coinciden.

Definición 11.3.1. *Sea X un espacio topológico y $x_0 \in X$ un punto arbitrario. Un* ***lazo*** *basado en x_0 es una trayectoria $f : I \to X$ tal que $f(0) = f(1) = x_0$.*

Si X es un espacio topológico y x_0 in X, denotamos por $\Omega(X, x_0)$ al conjunto de lazos basados en x_0. Este es un subconjunto de $C(I, X)$. De este modo, la homotopía de trayectorias divide también a $\Omega(X, x_0)$ en clases de equivalencia. Denotamos ahora las clases de equivalencia de lazos en x_0 como

$$\pi(X, x_0) = \{[f] \mid f \in \Omega(X, x_0)\} = \Omega(X, x_0)/_{\simeq}.$$

Si f y g son lazos en x_0, entonces también lo es $f * g$, por lo que

$$[f] \cdot [g] = [f * g] \in \pi(X, x_0)$$

y estamos en condiciones de reeununciar algunos de los resultados hasta ahora probados con la siguiente proposición.

Proposición 11.3.2. *Sean X un espacio topológico y $x_0 \in X$. Entonces la terna $(\pi(X, x_0), [e_{x_0}], \cdot)$ es un grupo.*

Demostración. Para demostrar que $\cdot$ es asociativa, consideremos $[f], [g], [h] \in \pi(X, x_0)$. Entonces

$$([f]\cdot[g])\cdot[h] = [f*g]\cdot[h] = [(f*g)*h] = [f*(g*h)] = [f]\cdot[g*h] = [f]\cdot([g]\cdot[h])$$

por el Lema 11.2.4. Veamos ahora que la clase $[e_{x_0}]$ de la constante x_0 es neutro para $\pi_1(X, x_0)$. Sea $[f] \in \pi(X, x_0)$, entonces

$$[f] \cdot [e_{x_0}] = [f * e_{x_0}] = [f] = [e_{x_0} * f] = [e_{x_0}] \cdot [f]$$

por el Lema 11.2.5. Por último, observemos que todo elemento de $\pi(X, x_0)$ tiene un inverso: dado $[f] \in \pi(X, x_0)$,

$$[f]^{-1} = [\overline{f}]$$

funciona como inverso. En efecto, por el Lema 11.2.6, $[f]^{-1}$ está bien definido. Además,

$$[f] \cdot [f]^{-1} = [f] \cdot [\overline{f}] = [f * \overline{f}] = [e_{x_0}] = [\overline{f} * f] = [\overline{f}] \cdot [f] = [f]^{-1} \cdot [f]$$

por el Lema 11.2.7. □

La terna $(\pi(X, x_0), [e_{x_0}], \cdot)$ recibe el nombre de **Grupo Fundamental relativo a** x_0, y lo denotaremos de aquí en adelante simplemente por $\pi(X, x_0)$

Cuando estudiamos grupos, las funciones de interés son aquellas que preservan la operación del dominio y la respectiva en el codominio. Formalmente, un *homomorfismo* entre dos grupos G y G', es una función $\varphi : G \to G'$, tal que

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$$

para cualesquiera $a, b \in G$. Los homomorfismos biyectivos reciben el nombre de *isomorfismos*. Es fácil ver que el inverso de un isomorfismo es también un homomorfismo de grupos, resultado no válido para la continuidad de funciones invertibles.

Teorema 11.3.3. *Sea X un espacio topológico y $\alpha : I \to X$ una trayectoria entre dos puntos x_0 y x_1 de X. Entonces α induce un isomorfismo $\widetilde{\alpha} : \pi(X, x_0) \to \pi(X, x_1)$ definido por*

$$\widetilde{\alpha}([f]) = [\overline{\alpha} * f * \alpha]$$

.

Demostración. Dados dos lazos f y g basados en x_0,

$$\widetilde{\alpha}([f]) = \widetilde{\alpha}([g]) \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\alpha} * f * \alpha \simeq \overline{\alpha} * g * \alpha.$$

Entonces, si concatenamos por la derecha con $\overline{\alpha}$, tenemos que

$$\begin{aligned} (\overline{\alpha} * f * \alpha) * \overline{\alpha} &\simeq (\overline{\alpha} * g * \alpha) * \overline{\alpha} \\ \overline{\alpha} * f * (\alpha * \overline{\alpha}) &\simeq \overline{\alpha} * g * (\alpha * \overline{\alpha}) \\ \overline{\alpha} * f &\simeq \overline{\alpha} * g. \end{aligned}$$

y al contatenar por la izquierda con α obtenemos

$$f \simeq \alpha * \overline{\alpha} * f \simeq \alpha * \overline{\alpha} * g \simeq g.$$

Así, $[f] = [g]$ y podemos concluir que $\widetilde{\alpha}$ es inyectiva.

Por otro lado, si h es un lazo en x_1. Entonces $f = \alpha * h * \overline{\alpha}$ es un lazo en x_0 y claramente

$$\widetilde{\alpha}([f]) = (h).$$

Por lo tanto, $\widetilde{\alpha}$ es una biyección.

Ahora consideremos dos lazos f y g basados en x_0. Entonces

$$\begin{aligned} \widetilde{\alpha}([f] \cdot [g]) &= \widetilde{\alpha}([f * g]) \\ &= [\overline{\alpha} * (f * g) * \alpha] \\ &= [\overline{\alpha} * f * \alpha * \overline{\alpha} * g * \alpha] \\ &= [\overline{\alpha} * f * \alpha] \cdot [\overline{\alpha} * g * \alpha] \\ &= \widetilde{\alpha}([f]) \cdot \widetilde{\alpha}([g]). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\widetilde{\alpha}$ es un homomorfismo biyectivo y un isomorfismo. □

Corolario 11.3.4. *Si X es un espacio conexo por trayectorias, entonces para cualesquiera dos puntos x_0 y x_1 de X, los grupos $\pi(X, x_0)$ y $\pi(X, x_1)$ son isomorfos.*

En otras palabras, el grupo fundamental es único (salvo isomorfismo) o no depende del punto base.

Definición 11.3.5. *Sea X un espacio topológico. Diremos que X es* ***simplemente conexo*** *si*

i) *X es conexo por trayectorias y*
ii) *$\pi(X, x_0)$ es el grupo trivial para algún x_0 en X (y por lo tanto para todo $x_0 \in X$).*

Proposición 11.3.6. *Si X es simplemente conexo, cualesquiera dos trayectorias con los mismos extremos son trayectorias homotópicas.*

Demostración. Sean $f, g : I \to X$ trayectorias tales que $f(0) = g(0) = x_0$ y $f(1) = g(1) = x_1$. Entonces $f * \overline{g}$ es un lazo en x_0 y como X es simplemente conexo, $[f * \overline{g}] = [e_{x_0}]$, i.e., $f * \overline{g} \simeq e_{x_0}$. Entonces

$$(f * \overline{g}) * g \simeq e_{x_0} * g \simeq g.$$

Pero también

$$(f * \overline{g}) * g \simeq f * (\overline{g} * g) \simeq f * e_{x_1} \simeq f.$$

Consecuentemnte, $f \simeq g$. □

Supongamos que ahora que $\varphi : X \to Y$ es una función continua. Si $x \in X$ y $y = \varphi(x) \in Y$, escribiremos

$$\varphi : (X, x) \to (Y, y)$$

y diremos que φ es una **función basada** en x. Notemos que en este caso, dado cualquier lazo f basado en x, la composición $\varphi f : I \to Y$ es un lazo basado en y. Este hecho sugiere estudiar la asignación inducida $f \mapsto \varphi f$ a nivel de homotopías. Mas precisamente definimos $\varphi_* : \pi(X, x) \to \pi(Y, y)$, de la siguiente manera

$$\varphi_*([f]) = [\varphi f].$$

Lema 11.3.7. *Sea $\varphi : (X, x) \to (Y, y)$ una función basada. Entonces la función inducida $\varphi_* : \pi(X, x) \to \pi(Y, y)$ es un homomorfismo.*

Demostración. Notemos primero que φ_* está bien definida. En efecto, si $f, g : I \to X$ son lazos homótopos basados en x, entonces de acuerdo al Lema 11.1.6 φf es un lazo homótpo a φg basado en y. Además,

$$\varphi(f * g) = (\varphi f) * (\varphi g).$$

puesto que para cada $x \in I$,

$$\begin{aligned} \varphi(f * g)(x) &= \begin{cases} \varphi(f(2x)), & \text{si } x \in [0, 1/2], \\ \varphi(g(2x - 1)), & \text{si } x \in [1/2, 1]. \end{cases} \\ &= \big((\varphi f) * (\varphi g)\big)(x). \end{aligned}$$

Entonces alevaluar φ_* en el producto de dos lazos tenemos

$$\begin{aligned}\varphi_*([f]\cdot[g]) &= \varphi_*([f*g])\\ &= [\varphi(f*g)]\\ &= [(\varphi f)*(\varphi g)]\\ &= [\varphi f]\cdot[\varphi g]\\ &= \varphi_*([f])\cdot\varphi_*([g]).\end{aligned}$$

Podemos concluir que φ_* es un homomorfismo. □

Teorema 11.3.8. *Sean X, Y y Z espacios topológicos. Entonces:*
(a) si $\varphi : (X,x) \to (Y,y)$, $\psi : (Y,y) \to (Z,z)$ son funciones basadas,

$$(\psi\varphi)_* = \psi_*\varphi_* : \pi(X,x) \to \pi(Z,z).$$

(b) si $id_X : (X,x) \to (X,x)$ es la identidad en X,

$$(id_X)_* = id_{\pi(X,x)}.$$

Demostración. (a) Consideremos primero un lazo f basado en x arbitrario, entonces

$$(\psi\varphi)_*([f]) = [(\psi\varphi)f] = [\psi(\varphi f)].$$

Por otro lado,

$$\psi_*\varphi_*([f]) = \psi_*(\varphi_*([f])) = \psi_*([\varphi f]) = [\psi(\varphi f)].$$

Conscuentemente,

$$(\psi\circ\varphi)_*([f]) = \psi_*\circ\varphi_*([f])$$

para todo $[f] \in \pi(X,x)$.

(b) Sea f un lazo basado en x. Entonces,

$$(id_X)_*([f]) = [id_X f] = [f] = id_{\pi(X,x)}$$

como se afrima. □

Corolario 11.3.9. *Sean X y Y dos espacios topológicos y $\varphi : (X,x) \to (Y,y)$ un homeomorfismo basado. Entonces el homomorfismo inducido $\varphi_* : \pi(X,x) \to \pi(Y,y)$ es un isomorfismo.*

Demostración. Es suficiente demostrar que φ_* es biyectiva, o bien, que tiene una función inversa. Como $\varphi : X \to Y$ es un homeomorfismo, su inversa $\varphi^{-1} : Y \to X$ es una función continua. Entonces, por el Teorema 11.3.8,

$$\varphi_*({\varphi^{-1}}_*) = (\varphi\varphi^{-1})_* = (id_Y)_* = id_{\pi(Y,y)}$$

por lo que $(\varphi^{-1})_*$ es inversa derecha de φ_*. Análogamente,

$$(\varphi^{-1})_*\varphi_* = (\varphi^{-1}\varphi)_* = (id_X)_* = id_{\pi(X,x)}$$

por lo que $(\varphi^{-1})_*$ es inversa izquierda de φ_*. Consecuentemente,

$$(\varphi^{-1})_* = (\varphi_*)^{-1}$$

y φ_* es un isomorfismo. $\square$

En otras palabras, como se mencinó al principio del capítulo, el grupo fundamental es un invariante topológico. Para terminar la sección, veremos que en los espacios conexos por trayectorias, el grupo fundamental de un producto es equivalente (isomorfo) al producto de los grupos fundamentales respectivos.

Teorema 11.3.10. *Sean X, Y dos espacios topológicos y $(x_0, y_0) \in X \times Y$. Entonces $\pi(X \times Y, (x_0, y_0))$ es isomorfo a $\pi(X, x_0) \times \pi(Y, y_0)$.*

Demostración. Sea $p : (X \times Y, (x_0, y_0)) \to (X, x_0)$ y $q : (X \times Y, (x_0, y_0)) \to (Y, y_0)$ las proyecciones basadas en X y Y respectivamente. Entonces $p_* : \pi(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_(X, x_0)$ y $q_* : \pi(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi(Y, y_0)$ son homomorfismos, por lo que

$$\phi : \pi\big(X \times Y, (x_0, y_0)\big) \to \pi(X, x_0) \times \pi(Y, y_0),$$

definida por

$$\phi([f]) = (p_*([f]), q_*([f])) = ([pf], [qf])$$

es igualmente un homomorfismo. Para completar la demostración, verifiquemos que ϕ es biyectiva.

Sea $([f_1], [f_2]) \in \pi(X, x_0) \times \pi(Y, y_0)$ donde f_1 y f_2 son lazos basados en x_0 y en y_0 respectivamente. Entonces

$$f : I \to X \times Y, \quad f(s) = (f_1(s), f_2(s))$$

es un lazo basado en (x_0, y_0). Claramente, $\phi([f]) = ([f_1], [f_2])$, i.e. ϕ es suprayectiva. Para demostrar ahora que ϕ es inyectiva, consideremos dos lazos f y g en (x_0, y_0) tales que $\phi([f]) = \phi([g])$. Entonces $[pf] = [pg]$ y $[qf] = [qg]$, por lo que existen homotopías de trayectorias $H_1 : pf \simeq pg$ y $H_2 : qf \simeq qg$. Definamos

$$H : I \times I \to X \times Y, \quad H(s, t) = (H_1(s, t), H_2(s, t)).$$

Entonces H es una función continua y también una homotopía entre los lazos f y g. En efecto, si $t = 0$,

$$H(s, 0) = (H_1(s, 0), H_2(s, 0)) = (pf(s), qf(s)) = f(s).$$

Análogamente, si $t = 1$ tendremos $H(s, 1) = g(s)$. Por otro lado, si $s = 0$,

$$H(0, t) = (H_1(0, t), H_2(0, t)) = (x_0, y_0).$$

Similarmente, se demuestra que $H(1, t) = (H_1(1, t), H_2(1, t)) = (x_0, y_0)$. Podemos entonces concluir que $[f] = [g]$ y que ϕ es inyectiva. $\square$

11.4. Invarianza Homotópica del Grupo fundamental

Hemos visto anteriormente que el grupo fundametal es un invariante topológico. En esta sección, veremos que también es un invariante homotópico, es decir, se preserva bajo homotopías.

Teorema 11.4.1. *Sean X y Y espacios topológicos, $x_0 \in X$, $f, g : X \to Y$ dos funciones continuas. Si F es una homotopía entre f y g, $y_0, y_1 \in Y$ son puntos tales que*

$$y_0 = f(x_0), \ y_1 = g(x_0),$$

y $\alpha : I \to Y$ es una trayectoria entre y_0 y y_1 determinada por $\alpha(t) = F(x_0, t)$, entonces

$$\tilde{\alpha} \circ f_* = g_*.$$

Demostración. Consideremos las funciones $\tilde{\alpha} \circ f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_1)$ y $g_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_1)$. Sea γ un lazo en x_0. Entonces

$$\tilde{\alpha} \circ f_*([\gamma]) = \tilde{\alpha}([f \circ \gamma]) = [\overline{\alpha} * (f \circ \gamma) * \alpha]$$

y

$$g_*([\gamma]) = [g \circ \gamma].$$

Para demostrar el teorema, basta demostrar que las trayectorias $g \circ \gamma$ y $\overline{\alpha} * (f \circ \gamma) * \alpha$ son homotópicas relativo a $\{0, 1\}$. Para ello, consideremos la homotopía $G : I \times I \to Y$ dada por $G(s, t) = F(\gamma(s), t)$. Para cada $i = 1, 2, 3, 4$ consideremos las trayectorias $\beta_i : I \to I \times I$ dadas por

$$\begin{aligned} \beta_1(s) &= (s, 0), \\ \beta_2(s) &= (0, s), \\ \beta_3(s) &= (s, 1), \\ \beta_4(s) &= (1, s). \end{aligned}$$

Notemos que las siguientes igualdades se cumplen:

$$\begin{aligned} G \circ \beta_1 &= f \circ \gamma, \\ G \circ \beta_2 &= \alpha, \\ G \circ \beta_3 &= g \circ \gamma, \\ G \circ \beta_4 &= \alpha. \end{aligned}$$

Como $I \times I \subset \mathbb{R}^2$ es convexo, se tiene que las trayectorias β_3 y $\overline{\beta}_2 * \beta_* \beta 4$ son homotópicas relativo a $\{0, 1\}$. Consecuentemente, $G \circ \beta_3 \simeq G \circ (\overline{\beta}_2 * \beta_* \beta 4)$ relativo a $\{0, 1\}$. Pero $G \circ \beta_3 = g \circ \gamma$, por lo que

$$g \circ \gamma \simeq G \circ (\overline{\beta}_2 * \beta_* \beta 4) \ \text{ relativo a } \{0, 1\}.$$

Por otro lado,

$$G \circ (\overline{\beta}_2 * \beta_* \beta 4) = (G \circ \overline{\beta}_2) * (G \circ \beta_1) * (G \circ \beta_4) = \overline{\alpha} * (f \circ \gamma) * \alpha.$$

Así, podemos concluir que las trayectorias $g \circ \gamma$ y $\overline{\alpha} * (f \circ \gamma) * \alpha$ son homotópicas relativo a $\{0,1\}$, como se quería probar. $\square$

Corolario 11.4.2. *Si $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ es una equivalencia homotópica, entonces $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ es un isomorfismo.*

Demostración. Sea $g : Y \to X$ la inversa homotópiva de f, es decir, $g \circ f \simeq 1_X$ y $f \circ g \simeq 1_Y$. Sea $x_1 = g(y_0)$ y $F : X \times I \to X$ una homotopía entre 1_X y $g \circ f$. Como $g \circ f(x_0) = x_1$, se tiene que $F(x_0, t) = \alpha(t)$ es una trayectoria entre x_0 y x_1. Por el teorema anterior, podemos concluir que

$$(g \circ f)_* = \tilde{\alpha} \circ (1_X)_* = \tilde{\alpha}.$$

Pero $\tilde{\alpha}$ es un isomorfismo, por lo que $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ también es un isomorfismo. De aquí que f_* sea monomorfismo y g_* sea epimorfismo.

Repitiendo el mismo argumento para $f \circ g$ y 1_Y, podemos concluir que g_* es monomorfismo y f_* es epimorfismo. Así, tanto f_* como g_* son isomorfismos de grupos. $\square$

Corolario 11.4.3. *Si X y Y son espacios conexos por trayectorias con el mismo tipo homotópico, entonces $\pi_1(X) = \pi_1(Y)$.*

Corolario 11.4.4. *Si X es un espacio contraible, entonces su grupo fundamental es trivial.*

11.5. Espacios cubrientes y levantamientos

El propósito de esta sección es dar las herramientas necesarias para poder calcular el grupo fundamental de la circunferencia.

Definición 11.5.1. *Sean Y y Y espacios topológicos y $p : Z \to Z$ una función continua y suprayectiva. Diremos que p es una **función cubriente** si para cada $z_0 \in Z$, existe una vecindad $U \subset Z$ de z_0 y una colección $\{V_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de subconjuntos abiertos y disjuntos en Y, tal que*

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha \quad y \quad p|_{V_\alpha} : V_\alpha \to U$$

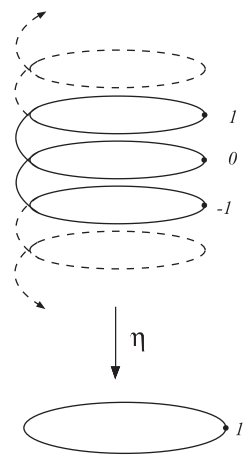
*es un homeomorfismo. En este caso diremos que Y es un **espacio cubriente** de Z.*

El siguiente resultado no sólo nos brindará un ejemplo de un espacio cubriente, también jugará un papel fundamental al calcular el grupo fundamental de la circunferencia.

Proposición 11.5.2. *La función* $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ *definida por*

$$\eta(t) = e^{2\pi i t} = \cos(2\pi t) + i\,\mathrm{sen}(2\pi t),$$

es una función cubriente.



Demostración. Claramente η es una función continua y suprayectiva. Más aún, podemos observar que $\eta([n, n+1]) = \mathbb{S}^1$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Consideremos $z \in \mathbb{S}^1$. Entonces $z = e^{2\pi i s}$ para algún $s \in \mathbb{R}$. Sean a, b números reales tales que $a < s < b$ y $b - a < 1$. Así, el arco abierto

$$U = \{e^{2\pi i t} \mid a < t < b\}$$

es una vecindad de z. Llamemos V al intervalo abierto (a, b) y a los intervalos desplazados $V_n = (a+n, b+n)$ para $n \in \mathbb{Z}$. Notemos que si $n \neq m$, entonces $V_n \cap V_m = \emptyset$. De lo contrario, podríamos encontrar dos enteros n y m con $n < m$ tales que $(a+n, b+n) \cap (a+m, b+m) \neq \emptyset$. Entonces tendríamos que $a + m < b + n$, por lo que

$$0 < m - n < b - a < 1.$$

Pero m y n son enteros, y por lo tanto $m - n \geq 1$, lo cual nos lleva a una contradicción. Concluimos que $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una colección disjunta de abiertos de $\mathbb{R}$. También es claro que

$$\eta^{-1}(U) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n.$$

Como V es homeomorfo a V_n para todo $n \in \mathbb{Z}$ bajo la traslación $t \mapsto t + n$, es suficiente demostrar que $\eta|_V : V \to U$ es un homeomorfismo.

Como η es una función continua, también lo es su restricción $\eta|_V$. Además, $\eta|_V(V) = \eta(V) = U$, por lo que $\eta|_V$ es suprayectiva. Sean $r, t \in (a, b)$.

Supongamos que $\eta|_V(r) = \eta|_V(t)$. Entonces
$$e^{2\pi ir} = e^{2\pi it},$$
por lo que $r = t + n$ para algún $n \in \mathbb{Z}$. Sin embargo, $b - a < 1$ y por lo tanto $|t - r| = |n| < 1$, por lo que $n = 0$. Así, $r = s$, lo cual prueba que $\eta|_V$ es inyectiva.

Para terminar, demostremos que $\eta|_V$ es abierta. Sea $(c, d) \subset (a, b)$ un abierto básico, entonces
$$\eta|_V((c, d)) = \eta((c, d)) = \{e^{2\pi it} \mid t \in (c, d)\}$$
representa un arco abierto en $\mathbb{S}^1$. Así, podemos concluir que $\eta|_V : V \to U$ es un homeomorfismo y por lo tanto la función η es una función cubriente. $\square$

Definición 11.5.3. *Sean X, Y y Z espacios topológicos. Supongamos que $p : Y \to Z$ es una función cubriente y $f : X \to Z$ un función continua. Una función $\widetilde{f} : X \to Y$ se llama **levantamiento** de f, si $p\widetilde{f} = f$.*

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

Proposición 11.5.4. *Sean X, Y, y Z espacios topológicos. Supongamos que $p : Y \to Z$ una función cubriente, X es conexo y $f : X \to Z$ es una función continua. Si $\widetilde{f}$ y $\widehat{f}$ son levantamientos de f y $\widetilde{f}(x_0) = \widehat{f}(x_0)$ en al menos un punto $x_0 \in X$, entonces $\widetilde{f} = \widehat{f}$.*

Demostración. Consideremos los conjuntos $S = \{x \in X \,|\, \widetilde{f}(x) = \widehat{f}(x)\}$ y su complemento $Q = \{x \in X \mid \widetilde{f}(x) \neq \widehat{f}(x)\}$. Demostraremos que tanto S como Q son abiertos en X. Como X es conexo y $S \neq \emptyset$, $Q = \emptyset$ y $S = X$ como se afrima.

Sean $x \in S$ y $z = f(x) \in Z$. Entonces existe una vecindad U_z de z tal que
$$p^{-1}(U_z) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha$$
y cada restriccioón $p : V_\alpha \to U_z$ es un homeomorfismo. Supongamos que $\widetilde{f}(x) = \widehat{f}(x) \in V_\beta$. Entonces, par la continuaidad de $\widetilde{f}$ y $\widehat{f}$, existe una vecindad N_x de x en X, tal que
$$\widetilde{f}(N_x) \subset V_\beta, \quad \text{y} \quad \widehat{f}(N_x) \subset V_\beta.$$
Si $y \in N_x$, como $p\widetilde{f} = f = p\widehat{f}$ se tiene
$$\widetilde{f}(y) \in p^{-1}(f(y)) \cap V_\beta = \{a_y\} = \widehat{f}(y) \cap V_\beta.$$

De donde se concluye que $\widetilde{f}(y) = \widehat{f}(y)$ y $N_x \subset S$. Esto muestra que $S \subset Z$ es abierto.

Demostremos ahora que Q es abierto. Sean $x \in Q$ y $f(x) = z$. Tomemos U_z y $\{V_\alpha\}$ como arriba. Supongamos que $\widetilde{f}(x) \in V_{\alpha_1}$ y $\widehat{f}(x) \in V_{\alpha_2}$. Si $\alpha_1 = \alpha_2$, dado que $p\widetilde{f}(x) = f(x) = p\widehat{f}(x) \in U_z$, al aplicar p^{-1} en $V_{\alpha_1} = V_{\alpha_2}$, tendríamos $\widetilde{f}(x) = \widehat{f}(x)$ contrario nuestra elección de x. Tenemos entonces $\alpha_1 \neq \alpha_2$ y $V_{\alpha_1} \cap V_{\alpha_2} = \emptyset$.

Como $\widetilde{f}$ y $\widehat{f}$ son continuas, existen vecindades de x, N_1 y N_2, tales que

$$\widetilde{f}(N_1) \subset V_{\alpha_1} \quad \text{y} \quad \widehat{f}(N_2) \subset V_{\alpha_2}.$$

Podemos concluir que $x \in N_1 \cap N_2 \subset Q$, i.e x es punto interior de Q y por lo tanto Q es abierto e X. □

Proposición 11.5.5. *Sea $p : Y \to Z$ una función cubriente entre dos espacios topológicos Y y Z. Dados $y_0 \in Y$ y $z_0 \in Z$ tales que $p(y_0) = z_0$, si $f : I \to Z$ es una trayectoria cuyo punto inicial es z_0, entonces existe un único levantamiento $\widetilde{f} : I \to Y$, tal que $\widetilde{f}(0) = y_0$.*

Demostración. Como p es una función cubriente, para cada punto $z \in Z$, podemos encontrar una vecindad U_z de z, tal que $p^{-1}(U_z) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}_z} V_\alpha$ es una descomposición disjunta de subconjuntos abiertos de Y donde $p|_{V_\alpha} : V_\alpha \to U_z$ es un homeomorfismo para cada $\alpha \in \mathcal{A}_z$. Así, $\mathcal{U} = \{U_z\}_{z \in Z}$ es una cubierta abierta para Z y $f^{-1}(\mathcal{U})$ una cubierta abierta del intervalo compacto I. Por el lema del número de Lebesque, podemos encontrar puntos $t_0, t_1, \ldots, t_n \in I$ tales que $t_0 = 0$, $t_n = 1$, $t_i < t_{i+1}$ y $f([t_i, t_{i+1}]) \subset U$, para algún $U \in \mathcal{U}$.

Construiremos el levantamiento $\widetilde{f}$ por inducción. Primero definamos $\widetilde{f}(0) = y_0$. Ahora supongamos que $\widetilde{f}(s)$ está definido para todo $t \in [0, t_i]$, para algún $i = 0, \ldots n-1$. Consideremos el intervalo $[t_i, t_{i+1}]$. Exste ntonces un abierto $U_z \in \mathcal{U}$, para el cual $f([t_i, t_{i+1}]) \subset U_z$. Como la colección $\{V_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}_z}$ es disjunta, hay un único índice $\beta \in \mathcal{A}_z$ en donde $\widetilde{f}(t_i) \in V_\beta$. Además, $p|_{V_\beta} : V_\beta \to U_z$ es un homeomorfismo. Así que podemos definir $\widetilde{f}$ en $[t_i, t_{i+1}]$ como

$$\widetilde{f}(t) = (p|_{V_\beta})^{-1}(f(t)).$$

Por la continuidad de $(p|_{V_\beta})^{-1}$, la función $\widetilde{f}$ es continua en el intervalo cerrado $[t_i, t_{i+1}]$, y por el Lema 11.1.3 es continua en $[0, t_{i+1}]$. Por la construcción, se sigue que $p\widetilde{f} = f$. Continuando con este proceso, se define de manera continua $\widetilde{f}$ en todo el intervalo $[0, 1]$ obteniendo así el levantamiento buscado. Por la Proposición 11.5.4, $\widetilde{f}$ es el único levantamiento posible. □

Proposición 11.5.6. *Sea $p : Y \to Z$ una función cubriente entre dos espacios Y y Z. Sean $y_0 \in Y$ y $z_0 \in Z$ tales que $p(y_0) = z_0$. Si $F : I \times I \to Z$ es una función continua con $F(0,0) = z_0$, entonces hay un único levantamiento $\widetilde{F} : I \times I \to Z$ tal que $\widetilde{F}(0,0) = y_0$. Más aún, si F es una homotopía relativa a $\{0,1\}$, entonces $\widetilde{F}$ también lo es.*

Demostración. Construiremos inductivamente el levantamiento $\widetilde{F}$. Primero definamos $\widetilde{F}(0,0) = y_0$. Luego podemos aplicar dos veces la Proposición 11.5.5 para extender $\widetilde{F}$ a un levantamiento de $F|_{I\times\{0\}\cup\{0\}\times I}$. Además, como p es una función cubriente, podemos encontrar para cada punto $z \in Z$, una vecindad U_z de z tal que $p^{-1}(U_z) = \bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}_z} V_\alpha$, donde $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}_z}$ es una colección disjunta de subconjuntos abiertos de Y de manera que cada $p|_{V_\alpha} : V_\alpha \to U_z$ es un homeomorfismopara. Como antes, usando la compacidad de $I \times I$, podemos encontrar puntos $s_0 < s_1 < \cdots < s_m \in I$ y $t_0 < t_1 < \cdots < t_n \in I$ tales que $s_0 = 0 = t_0$, $s_m = 1 = t_n$ y $F([s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]) \subset U$, para algún $U \in \mathcal{U}$.

Sea R_{ij} el rectángulo determinado por

$$R_{ij} = [s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j], \quad i = 1, \dots m, \quad j = 1 \dots n.$$

Definiremos el levantamiento por inducción sobre los rectángulos

$$R_{11},\ R_{21},\ \dots\ R_{m1},\ R_{12},\ R_{22},\ \dots,\ R_{(m-1)n},\ R_{mn}.$$

Para ello supongamos que $\widetilde{F}$ está definida en el siguiente conjunto

$$A = \Big(I \times \{0\}) \cup (\{0\} \times I\Big) \cup \Big(\bigcup \Big\{R_{ij} \mid j < k,\ \text{ó } j = k \text{ y } i < l\Big\}\Big).$$

Ahora definamos $\widetilde{F}$ en el rectángulo R_{lk} de la siguiente manera. Consideremos $U_z \in \mathcal{U}$, tal que

$$F(R_{lk}) \subset U_z.$$

Sabemos que $\widetilde{F}$ ya está definda en $A \cap R_{lk}$, luego, como $\widetilde{F}$ es un levantamiento de $F|_A$, podemos asegurar que

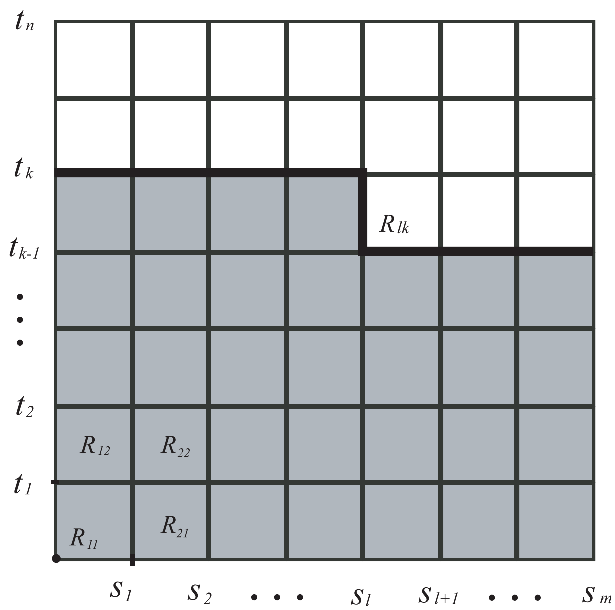
$$\widetilde{F}(A \cap R_{lk}) \subset p^{-1}(U_z) = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}_z} V_\alpha.$$

Como la colección de abiertos $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}_z}$ es disjunta y el conjunto

$$A \cap R_{lk} = \big(\{s_{l-1}\} \times [t_{k-1}, t_k]\big) \cup \big([s_{l-1}, s_l] \times \{t_{k-1}\}\big)$$

es conexo, podemos asegurar que existe un único abierto V_β, $\beta \in \mathcal{A}_z$, donde $\widetilde{F}(A \cap R_{lk}) \subset V_\beta$. Pero $p : V_\beta \to U_z$ es un homeomorfismo, así que podemos definir $\widetilde{F}$ en R_{lk} como

$$\widetilde{F}(s,t) = (p|_{V_\beta})^{-1}(F(s,t)).$$



Si $(s,t) \in A \cap R_{lk}$, entonces

$$p|_{V_\beta}(\widetilde{F}(s,t)) = F(s,t)$$

por lo que $\widetilde{F}(s,t) = (p|_{V_\beta})^{-1}(F(s,t))$ y $\widetilde{F} : A \cup R_{lk} :\to Z$ está bien definida. Por el Lema 11.1.3, $\widetilde{F}$ es una función continua.

Continuando con este proceso, se define $\widetilde{F}$ en todo el rectángulo $I \times I$. Por la Proposición 11.5.4, la función $\widetilde{F}$ es única.

Para completar la demostración verificamos que si F es una homotopía relativa a $\{0,1\}$, entonces también lo es $\widetilde{F}$. Para ello, es suficiente probar que $\widetilde{F}(\{0\} \times I) = F(0,0) = y_0$ y que $\widetilde{F}(\{1\} \times I) = \widetilde{F}(1,0) = y_1$, para algún punto $y_1 \in Y$.

Como $F(\{0\} \times I) = z_0$ y $\widetilde{F}$ es un levantamiento de F, se tiene que

$$\widetilde{F}(\{0\} \times I) \subset p^{-1}(z_0).$$

Pero $p^{-1}(z_0)$ es un subespacio discreto (ver ejercicios) y $\{0\} \times I$ es conexo. Además, $\widetilde{F}(0,0) = y_0 \in p^{-1}(z_0)$ y podemos conluir que $\widetilde{F}(\{0\} \times I) = y_0$. Análogamente, si $F(1,0) = z_1$ y $\widetilde{F}(1,0) = y_1$, entonces $y_1 \in p^{-1}(z_1)$. Pero $p^{-1}(z_1)$ es de nuevo discreto y $\{1\} \times I$ es conexo. Consecuentemente, $\widetilde{F}(\{1\} \times I) = y_1$ como se quería probar. $\square$

Teorema 11.5.7. *Sean $p : Y \to Z$ una función cubriente entre dos espacios Y y Z, $z_0, z_1 \in Z$, $y_0 \in Y$. Supongamos que $p(y_0) = z_0$ y que $f, g : I \to Z$*

son trayectorias entre z_0 y z_1. Sean $\widetilde{f}$ y $\widetilde{g}$ los levantamientos de f y g respectivamente, cuyo punto inicial es y_0. Si f y g son trayectorias homótopas, entonces $\widetilde{f}$ y $\widetilde{g}$ también lo son. En particular, $\widetilde{f}(1) = \widetilde{g}(1)$.

Demostración. Sea $H : I \times I \to Z$ una homotopía de trayectorias entre f y g. Por la Proposición 11.5.6, hay un levantamiento de $\widetilde{H}$ de H que es también una homotopía de trayectorias con $\widetilde{H}(0,0) = y_0$. Entonces $\widetilde{H}(\{0\} \times I) = y_0$ y $\widetilde{H}(\{1\} \times I) = y_1$ para $y_1 \in Y$.

Notemos que $\widetilde{H}|_{I\times\{0\}} : I \to Y$ y $\widetilde{H}|_{I\times\{1\}} : I \to Y$ son trayectorias entre y_0 y y_1. Más aún,

$$p\widetilde{H}|_{I\times\{0\}}(s) = f(s) \quad \text{y} \quad p\widetilde{H}|_{I\times\{1\}}(s) = g(s)$$

por lo que $\widetilde{H}|_{I\times\{0\}}$ y $\widetilde{H}|_{I\times\{1\}}$ son levantamientos de f y g respectivamente. Por la unicidad del levantamiento de una trayectoria (Proposición 11.5.5),

$$\widetilde{f} = \widetilde{H}|_{I\times\{0\}} \quad \text{y} \quad \widetilde{g} = \tilde{H}|_{I\times\{1\}}.$$

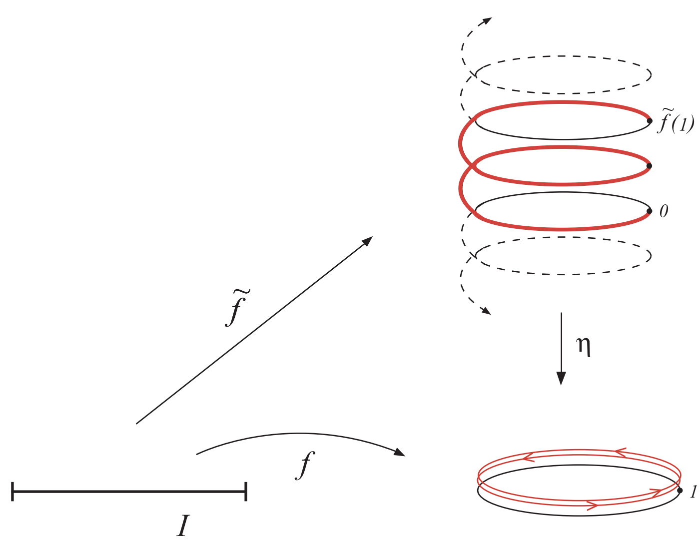
Concluimos entonces que $\widetilde{f}$ y $\widetilde{g}$ son trayectorias homotópicas. $\square$

11.6. El grupo fundamental del círculo y sus aplicaciones

Consideremos la función cubriente $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ definida en el Teorema 11.5.2. Notemos que $\eta^{-1}(1) = \mathbb{Z}$. Usaremos los resultados de la sección anterior para demostrar que $\pi(\mathbb{S}^1, 1)$ es isomorfo al grupo aditivo $\mathbb{Z}$.

Teorema 11.6.1. *Los grupos $\pi(\mathbb{S}^1, 1)$ y $\mathbb{Z}$ son isomorfos.*

Demostración. Para cada lazo $f : I \to \mathbb{S}^1$ basado en $1 \in \mathbb{S}$, denotemos por $\widetilde{f}$ al único levantamiento de f, tal que $\widetilde{f}(0) = 0$.



Como la definición de levantamiento implica que $\widetilde{f}(1) \in \eta^{-1}(1) = \mathbb{Z}$. Definimos entonces la función $\Phi : \pi(\mathbb{S}^1, 1) \to \mathbb{Z}$ de la siguiente manera:

$$\Phi([f]) = \widetilde{f}(1).$$

Notemos que si $[f] = [g]$, entonces f y g son trayectorias homotópicas que satisfacen las hipótesis del Teorema 11.5.7 y por lo tanto $\widetilde{f}(1) = \widetilde{g}(1)$, lo cual demustra que Φ está bien definida. Demostremos que Φ es un isomorfismo de grupos.

Para demostrar que Φ es suprayectiva consideremos $n \in \mathbb{Z} = \eta^{-1}(1) \subset \mathbb{R}$. Escojamos alguna trayectoria $\widetilde{f} : [0,1] \to \mathbb{R}$ con punto inicial en cero y punto final en n (por ejemplo, $\widetilde{f}(t) = tn$). Entonces $f = \eta\widetilde{f}$ es un lazo en 1 y claramente $\Phi([f]) = \widetilde{f}(1) = n$.

Veamos que Φ es inyectiva. Sean $[f], [g] \in \pi(\mathbb{S}^1, 1)$ con

$$\Phi([f]) = \widetilde{f}(1) = n = \widetilde{g}(1) = \Phi([g]).$$

Entonces $\widetilde{f}$ y $\widetilde{g}$ son trayectorias en $\mathbb{R}$ que coinciden en sus puntos inicial y final respectivamente. Como $\mathbb{R}$ es un espacio simplemente conexo, $\widetilde{f}$ y $\widetilde{g}$ son trayectorias homótopas. Luego, existe una homotopía de trayectorias $H : I \times I \to \mathbb{R}$ entre $\widetilde{f}$ y $\widetilde{g}$. La función $H = \eta\widetilde{H} : I \times I \to \mathbb{S}^1$ es entonces una homotopía de trayectorias entre f y g, i.e. $[f] = [g]$.

Por último, demostremos que Φ es un homomorfismo de grupos. Sean f y g dos lazos basados en 1.

Supongamos que $\Phi([f]) = \widetilde{f}(1) = n$ y $\Phi([g]) = \widetilde{g}(1) = m$. Definamos la trayectoria $\widetilde{h} : I \to \mathbb{R}$ por

$$\widetilde{h}(t) = \begin{cases} \widetilde{f}(2t), & \text{si } t \in [0, 1/2], \\ n + \widetilde{g}(2t-1), & \text{si } t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Entonces $\widetilde{h}(1) = n + \widetilde{g}(1) = n + m$ y, $\widetilde{h}$ es un levantamiento de $f * g$. En efecto,

$$\eta\widetilde{h}(t) = \begin{cases} \eta(\widetilde{f}(2t)), & \text{si } t \in [0, 1/2], \\ \eta(n + \widetilde{g}(2t-1)), & \text{si } t \in [1/2, 1]. \end{cases} = \begin{cases} f(2t), & \text{si } t \in [0, 1/2], \\ g(2t-1), & \text{si } t \in [1/2, 1]. \end{cases} = f{*}g(t).$$

Consecuentemente, $\widetilde{h}$ es el único levantamiento de $f * g$ que inicia en 0. Así,

$$\Phi([f][g]) = \Phi([f * g]) = \widetilde{h}(1) = n + m = \Phi([f]) + \Phi([g]).$$

□

Definición 11.6.2. *Dado un lazo $f : I \to \mathbb{S}^1$ basado en 1, el **grado** de f, denotado por deg f, es el entero $\Phi([f])$.*

Corolario 11.6.3. *La circunferencia* $\mathbb{S}^1$ *no es contraible.*

Ahora veremos cómo el grupo fundamental del círculo nos ayuda a demostrar algunos teoremas importantes en matemáticas.

11.6.1. El Teorema del punto fijo de Brouwer.

Definición 11.6.4. *Sea* X *un espacio topológico. Se dice que* X *tiene la* ***propiedad del punto fijo*** *si para cualquier función continua* $f : X \to X$ *existe un punto* $x_0 \in X$ *tal que* $f(x_0) = x_0$*.*

Un teorema debido Brouwer nos dice que los discos euclidianos $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ tienen la propiedad del punto fijo para cada $n \in \mathbb{N}$. Anteriormente se ha demostrado su validez para $n = 1$. Las herramientas hasta ahora desarrolladas sin embargo, sólo nos permiten demostrar el caso siguiente $n = 2$.

Para este efecto introduciremos la noción de *retracto* en un espacio.

Definición 11.6.5. *Sean* X *un espacio y* $A \subset X$*. Una función continua* $r : X \to A$ *se llama* ***retracción*** *si* $r(a) = a$ *para toda* $a \in A$*. En este caso* A *es llamado* ***retracto*** *de* X*.*

Lema 11.6.6. *Sean* Y *un espacio topológico y* $f : \mathbb{S}^n \to Y$ *una función continua. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. f *es homótopa a una función constante.*
2. *Existe una función* $\widetilde{f} : \mathbb{B}^{n+1} \to Y$ *que hace el siguiente diagrama conmutativo.*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & Y \\ \mathbb{B}^{n+1} \arrow[ur, dashed, "\widetilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración. Supongamos que f es homótopa a una función constante con valor $p \in Y$, $c_p : \mathbb{S}^n \to Y$. Sea $F : \mathbb{S}^n \times [0,1] \to Y$ una homotopía con $F(x,0) = f(x)$ y $F(x,1) = p$. Definamos la función $\widetilde{f} : \mathbb{B}^{n+1} \to Y$ de la siguiente manera:

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} p, & \text{si } \|x\| \leq \frac{1}{2}, \\ F\Big(\frac{x}{\|x\|}, 2 - 2\|x\|\Big) & \text{si } \frac{1}{2} \leq \|x\| \leq 1 \end{cases}$$

Como $\widetilde{f}$ es unión de dos funciones continuas con dominios cerrados, las cuales coinciden en la intersección de sus dominios, esta función es continua. Además, si $x \in \mathbb{S}^{n-1}$, tenemos que

$$\tilde{f}(x) = F\Big(\frac{x}{\parallel x \parallel}, 2 - 2 \parallel x \parallel\Big) = F(x,0) = f(x).$$

Entonces, $\tilde{f}$ es la extensión de f que estábamos buscando.

Ahora supongamos que existe una función $\widetilde{f}$ que extiende a f. Definamos la función $H : \mathbb{S}^n \times [0,1] \to Y$ como

$$H(x,t) = \widetilde{f}(tx).$$

De esta manera,

$$H(x,1) = \widetilde{f}(x) = f(x) \text{ y } H(x,0) = \widetilde{f}(0).$$

Esto nos dice que f es homótopa a la constante con valor $\widetilde{f}(0)$. $\square$

Lema 11.6.7. *Los siguientes enunciados son equivalentes:*
(a) $\mathbb{B}^n$ *tiene la propiedad del punto fijo.*
(b) $\mathbb{S}^{n-1}$ *no es retracto de* $\mathbb{B}^n$*.*
(c) $\mathbb{S}^{n-1}$ *no es contraible.*

Demostración. Demostraremos las primeras implicaciones por contradicción.

$(a) \Rightarrow (b)$. Supongamos que existe una retracción $r : \mathbb{B}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$. Entonces la función $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^{n-1}$ dada por $f(x) = -r(x)$ es una función continua. Como $\mathbb{B}^n$ tiene la propiedad del punto fijo, existe $x_0 \in \mathbb{B}^2$ tal que $f(x_0) = x_0$. Pero $r(x_0) \in \mathbb{S}^{n-1}$, por lo que $x_0 = f(x_0) = -r(x_0) \in \mathbb{S}^{n-1}$. De este modo, $r(x_0) = x_0$, pues r es una retracción y consecuentemente $r(x_0) = x_0 = -r(x_0)$, lo cual es una contradicción ya que $r(x_0) \in \mathbb{S}^{n-1}$.

$(b) \Rightarrow (c)$. Supongamos que $\mathbb{S}^{n-1}$ es contraible. Entonces la identidad $Id : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$ es homótopa a una constante. Por el lema anterior, existe una extensión continua $\widetilde{Id} : \mathbb{B}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ de I. En este caso $\widetilde{Id}$ es una retracción, lo cual contradice a (b).

$(c) \Rightarrow (b)$. Supongamos que existe una retracción $r : \mathbb{B}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$. Definamos $H : \mathbb{S}^{n-1} \times I \to \mathbb{S}^{n-1}$ por

$$H(x,t) = r(tx).$$

Entonces H es una homotopía entre la identidad en $\mathbb{S}^{n-1}$ y una constante, por lo que $\mathbb{S}^{n-1}$ es contraible, una contradicción.

$(b) \Rightarrow (a)$. Supongamos que existe $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ tal que f no tiene punto fijo. Para cada $x \in \mathbb{B}^n$, definamos por L_x al segmento

$$L_x = \{y \in \mathbb{B}^n \mid y = tx + (1-t)f(x),\ t > 0\}.$$

Es decir L_x es el rayo que parte del punto $f(x)$ en dirección del punto x. Definamos $r : \mathbb{B}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ por

$$r(x) = L_x \cap \mathbb{S}^{n-1}$$

la cual está bien definida (ver ejercicio 9). Se puede demostrar también que si $f(x) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $x - f(x) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, entonces

$$r(x) = t(x)x + (1 - t(x))f(x),$$

donde

$$t(x) = \frac{-\sum_{i=1}^n a_i b_i + \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 + \sum_{i=1}^n b_i^2 - \sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2}}{\sum_{i=1}^n b_i^2}.$$

Como $f(x) \neq x$, se tiene que $(b_1, b_2, \ldots b_n) \neq (0, 0, \ldots 0)$, por lo que $t(x)$ está bien definido y por lo tanto r es una función continua. Además $r(x) \in \mathbb{S}^{n-1}$ para todo $x \in X$. Por otro lado, si $x \in \mathbb{S}^{n-1}$, entonces $r(x) = L_x \cap \mathbb{S}^{n-1} = x$, por lo que r es una retración, lo cual contradice (b). $\square$

Teorema 11.6.8 (Brouwer)**.** $\mathbb{B}^2$ *tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. La demostración se sigue del lema anterior y del hecho que $\mathbb{S}^1$ no es contraible. $\square$

11.6.2. El grupo fundamental de $\mathbb{S}^n$. La compacidad y la conexidad nos han ayudado a saber cuando dos espacios no son homeomorfos. Ahora veremos cómo el grupo fundamental también puede ayudarnos en ese sentido.

Teorema 11.6.9. *Sea X un espacio topológico tal que $X = U \cup V$, donde U y V son subconjuntos abiertos de X. Si U y V son simplemente conexos y $U \cap V$ es conexo por trayectorias, entonces X es simplemente conexo.*

Demostración. Primero demostremos que X es conexo por trayectorias. Sean x_0 y x_1 dos puntos arbitrarios en X. Si $\{x_0, x_1\} \subset U$ ó $\{x_0, x_1\} \subset V$, al ser U y V conexos por trayectorias existe una trayectoria de x_0 a x_1. Supongamos entonces que $x_0 \in U$ y $x_1 \in V$. Sea $y \in U \cap V$. Como U es conexo por trayectorias, existe una trayectoria $f : I \to U$ tal que $f(0) = x_0$ y $f(1) = y$. Análogamente, existe $g : I \to V$, tal que $g(0) = y$ y $g(1) = x_1$. Entonces $f * g$ es una trayectoria de x_0 a x_1, lo cual demuestra que X es conexo por trayectorias.

En virtud del Corolario 11.3.4, es suficiente demostrar que para cualquier punto $p \in U \cap V$ y para cualquier lazo α basado en p, α y e_p son trayectorias homótopas.

Consideremos entonces $p \in U \cap V$ y un lazo $\alpha : I \to X$ basado en p. Como I es compacto y $\alpha^{-1}(U)$, $\alpha^{-1}(V)$ es una cubierta abierta para I, podemos, aplicar el lema del número de Lebesque para encontrar puntos $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = 1$ tales que $[t_{i-1}, t_i] \subset \alpha^{-1}(U)$ ó $[t_{i-1}, t_i] \subset \alpha^{-1}(V)$, para todo

$i \in \{1, \dots, n\}$. Consecuentemente, $\alpha([t_{i-1}, t_i]) \subset U$ ó $\alpha([t_{i-1}, t_i]) \subset V$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, sea $\alpha_i : I \to X$ la trayectoria dada por

$$\alpha_i(x) = \alpha((t_i - t_{i-1})x + t_{i-1}), \quad x \in I.$$

Entonces α_i es una trayectoria entre $\alpha(t_{i-1})$ y $\alpha(t_i)$. Más aún, $\alpha_i(I) = \alpha([t_{i-1}, t_i])$, por lo que $\alpha(I)$ está contenido en U o en V. Además

$$[\alpha] = [\alpha_1 * \alpha_2 * \cdots * \alpha_n].$$

pues $\alpha_1 * \alpha_2 * \cdots * \alpha_n$ es una reparametrización de α (ejercicio).

Como U, V y $U \cap V$ son conexos por trayectorias, para cada $\alpha(t_i)$, $i \in \{1, \dots n-1\}$, podemos encontrar una trayectoria $\gamma_i : I \to X$ entre p y $\alpha(t_i)$ que satisface las siguientes condiciones:

1. si $\alpha(t_i) \in U$, entonces $\gamma_i(I) \subset U$,
2. si $\alpha(t_i) \in V$, entonces $\gamma_i(I) \subset V$,
3. si $\alpha(t_i) \in U \cap V$, entonces $\gamma_i(I) \subset U \cap V$.

Notemos que cada $\gamma_{i-1} * \alpha_i * \overline{\gamma}_i$ es un lazo en p para todo $i \in \{2, \dots n_1\}$. Además, por la construcción de las trayectorias α_i y γ_i, se tiene que

$$\gamma_{i-1} * \alpha_i * \overline{\gamma}_i(I) \subset U \text{si} \;\; \alpha(t_i) \in U,$$

$$\gamma_{i-1} * \alpha_i * \overline{\gamma}_i(I) \subset V \text{si} \;\; \alpha(t_i) \in V.$$

En ambos casos, como U y V son simplemente conexos, se tiene que $[\gamma_{i-1} * \alpha_i * \overline{\gamma}_i] = [e_p]$. Análogamente, $\alpha_1 * \overline{\gamma}_1$ y $\gamma_{n-1} * \alpha_n$ son trayectorias homótopas a e_p. Entonces

$$\begin{aligned}
[\alpha] &= [\alpha_1 * \alpha_2 * \cdots * \alpha_n] \\
&= [\alpha_1 * \overline{\gamma}_1 * \gamma_1 * \alpha_2 * \overline{\gamma}_2 * \gamma_2 * \cdots * \overline{\gamma}_{n-1} * \gamma_{n-1} * \alpha_n] \\
&= ([\alpha_1 * \overline{\gamma}_1]) \cdot ([\gamma_1 * \alpha_2 * \overline{\gamma}_2]) \cdot \cdots \cdot ([\gamma_{n-1} * \alpha_n]) \\
&= [e_p] \cdot [e_p] \cdot \ldots [e_p] = [e_p].
\end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos conlcuir que X es simplemente conexo. $\square$

Corolario 11.6.10. *Si $n \geq 2$, entonces $\mathbb{S}^n$ es simplemente conexo.*

Demostración. Sean x, y y dos puntos en $\mathbb{S}^n$, distintos. Entonces $U = \mathbb{S}^n \setminus \{x\}$ y $V = \mathbb{S}^n \setminus \{y\}$ son conjuntos abiertos en $\mathbb{S}^n$. Más aún, U es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ y V es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$, por lo que tanto U como V son simplemente conexos. Además, $U \cap V$ es conexo por trayectorias. Así, podemos aplicar el Teorema 11.6.9, y concluir que $\mathbb{S}^n$ es simplemente conexo. $\square$

Corolario 11.6.11. *El toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ no es homeomorfo a la esfera $\mathbb{S}^2$.*

DEMOSTRACIÓN. En virtud del Corolario 11.3.9, es suficiente demostrar que el grupo fundamental de la esfera no es isomorfo al grupo fundamental del toro. Pero $\pi(\mathbb{S}^2) = \{0\}$, según el corolario 11.6.10, mientras que por el Teorema 11.3.10, $\pi(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Por lo tanto, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ no es homeomorfo $\mathbb{S}^2$, como se quería demostrar. □

11.6.3. El teorema fundamental del álgebra. Ahora veremos una bonita aplicación del grupo fundamental al álgebra. Veremos que a partir del grupo fundamental del círculo, es posible dar una demostración sencilla del *Teorema Fundamental del Álgebra*.

Teorema 11.6.12 (Teorema Fundamental del Álgebra)**.** *Todo polinomio no constante con coeficientes complejos posee una raíz compleja.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{k-1} z^{k_1} + z^k$ un polinomio con coeficientes $a_i \in \mathbb{C}$ para todo $i = 0, \dots k-1$ $(k > 0)$. Supongamos que P no posee ninguna raíz. Entonces para todo $z \in \mathbb{C}$, $P(z) \neq 0$. Así, podemos definir la función $G : I \times [0, \infty) \to \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ de la siguiente manera:

$$G(x,t) = \frac{P(te^{2\pi i x})}{\|P(te^{2\pi i x})\|} \cdot \frac{\|P(t)\|}{P(t)}.$$

Entonces G está bien definida y es una función continua. Ahora definamos la función $H : I \times I \to \mathbb{S}^1$ de la siguiente manera:

$$H(x,t) = \begin{cases} G\left(x, \frac{t}{t-1}\right), & \text{si } t \in [0,1), \\ e^{2\pi k i x}, & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

Para demostrar que H es continua, basta demostrar que

$$\lim_{t \to 1} G\left(x, \frac{t}{t-1}\right) = e^{2\pi k i x}. \tag{31}$$

Pero $r = \frac{t}{t-1} \to \infty$ cuando $t \to 1$, por lo que

$$\lim_{t \to 1} G\left(x, \frac{t}{t-1}\right) = \lim_{r \to \infty} G(x,r).$$

Ahora bien,

$$G(x,r) = \frac{(a_0 + a_1 r e^{2\pi i x} + \cdots + a_k r^k e^{2\pi k i x}) \cdot |a_0 + a_1 r + \cdots + a_k r^k|}{|a_0 + a_1 r e^{2\pi i x} + \cdots + a_k r^k e^{2\pi k i x}| \cdot (a_0 + a_1 r + \cdots + a_k r^k)}.$$

Si multiplicamos y dividimos el segundo lado de la ecuación por $r^k/|r^k|$, obtenemos que

$$G(x,r) = \frac{(a_0/r^k + a_1 e^{2\pi i x}/r^{k-1} + \cdots + a_k e^{2\pi k i x})\|a_0/r^k + a_1/r^{k-1} + \cdots + a_k\|}{\|a_0/r^k + a_1 e^{2\pi i x}/r^{k-1} + \cdots + a_k e^{2\pi k i x}\|(a_0/r^k + a_1/r^{k-1} + \cdots + a_k)}$$

Consecuentemente,

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to\infty} G(x,r) &= \lim_{r\to\infty} \frac{(a_0/r^k + a_1 e^{2\pi i x}/r^{k-1} + \cdots + a_k e^{2\pi k i x})\|a_0/r^k + a_1/r^{k-1} + \cdots + a_k\|}{\|a_0/r^k + a_1 e^{2\pi i x}/r^{k-1} + \cdots + a_k e^{2\pi k i x}\|(a_0/r^k + a_1/r^{k-1} + \cdots + a_k)} \\
&= \frac{(a_k e^{2\pi k i x})\|a_k\|}{a_k\|a_k e^{2\pi k i x}\|} \\
&= e^{2\pi k i x}.
\end{aligned}$$

Así, (31) está demostrado y por lo tanto H es una función continua. Ahora notemos que $H(0,t) = 1$ y $H(1,t) = 1$ para cada $t \in I$, por lo que H es en realidad una homotopía de trayectorias entre $H_0(x) = H(x,0)$ y $H_1(x) = H(x,1)$.

Notemos además que $H_0(x) = G(x,0) = 1$ y $H_1(x) = e^{2\pi k i x}$, por lo que deg $H_0 = 0$ y deg $H_1 = k$. Sin embargo, por ser H_0 y H_1 trayectorias homotópicas, se tiene que deg $H_0 =$ deg H_1, lo cual es una contradicción. Consecuentemente el polinomio P tiene una raíz y por lo tanto el teorema queda demostrado. $\square$

11.6.4. El teorema de Borsuk-Ulam.

Teorema 11.6.13 (Borsuk-Ulam)**.** *No existe función impar $f : \mathbb{S}^{n+1} \to \mathbb{S}^n$ para $n \geq 0$.*

Demostración. Para $n = 0$ se sigue de la conexidad de la circunferencia $\mathbb{S}^1$. Aquí vamos a demostrar el caso $n = 1$.

Supongamos que existe una función impar $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1$. Consideremos el lazo ecuatorial $\eta : [0,1] \to \mathbb{S}^2$ dada por $\eta(x) = (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x, 0)$. Denotemos por φ a la composición $f\eta$. Entonces, como $f(-x) = -f(x)$, tenemos que

$$\varphi(x + \frac{1}{2}) = -\varphi(x) \quad \forall x \in \big[0, \frac{1}{2}\big].$$

Sea $\widetilde{\varphi}$ el levantamiento de φ respecto a la función cubriente $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1,\ p(t) = e^{2\pi i t}$. Como $p\widetilde{\varphi} = \varphi$, tenemos que

$$\widetilde{\varphi}(x + \frac{1}{2}) = \widetilde{\varphi}(x) + \frac{2k(x)+1}{2},$$

para algún entero $k(x)$ con $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Se sigue entonces que $k(x)$ depende continuamente de x en $[0, \frac{1}{2}]$. Como este último es conexo, inferimos que $k(x)$ es constante en $[0,1]$. En particular, $k(0) = k(1/2)$. Esto implica que

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}(1) &= \widetilde{\varphi}(\frac{1}{2}) + \frac{2k+1}{2} \\
\widetilde{\varphi}(\frac{1}{2}) &= \widetilde{\varphi}(0) + \frac{2k+1}{2}.
\end{aligned}$$

De modo que $\widetilde{\varphi}(1) = \widetilde{\varphi}(0) + 2k + 1$. Pero $\widetilde{\varphi}(0) = 0$, así que $\widetilde{\varphi}(1) = 2k + 1$. En particular, $\deg \varphi = \widetilde{\varphi}(1) = 2k + 1 \neq 0$ y φ no es nulhomotópica.

Por otro lado, $\varphi = f\eta$. Como $\pi(\mathbb{S}^2) = 0$, debemos tener que η es nulhomótopa en $\mathbb{S}^2$ y por tanto φ es nulhomótopa en $\mathbb{S}^1$. Arribamos a una contradicción . Podemos concluir que no existe una función impar $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1$ $\square$

Corolario 11.6.14. *Para toda función continua $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$, hay un par de puntos antipodales $x, -x \in \mathbb{S}^2$ tales que $f(x) = f(-x)$.*

DEMOSTRACIÓN. De no ser este el caso, podemos definir la función $\varphi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1$ como

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}$$

la cual es impar, contradiciendo el Teorema 11.6.13. $\square$

Este corolario tiene una singular aplicación:

Ejemplo 11.6.1. En cada instante de tiempo, hay sobre la Tierra un par de puntos antipodales con la misma temperatura y presión.

Corolario 11.6.15. *La esfera $\mathbb{S}^2$ no es homeomorfo a ningún subconjunto de $\mathbb{R}^2$.*

Corolario 11.6.16. *Para toda función impar $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ existe un punto $x \in \mathbb{S}^2$ tal que $f(x) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Si la conclusión es falsa, entonces la función $\varphi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1$ definida como $\varphi(x) = \frac{f(x)}{\|f(x)\|}$ es impar, contradiciendo el Teorema 11.6.13. $\square$

Corolario 11.6.17. *Sea $\mathbb{S}^2 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, donde A_1, A_2, A_3 son subconjuntos cerrados de la esfera. Entonces por lo menos uno de estos conjuntos contiene un par de elementos antipodales.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $f_i : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$ las funciones de distancia a los A_i, i.e.

$$f_i(x) = \inf_{s \in A_i} \|x - s\|.$$

Sea $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$. Existe entonces, por elcorolario 11.6.14 un $x_0 \in \mathbb{S}^2$ tal que $f(x_0) = f(-x_0)$, i.e.

$$f_1(x_0) = f_1(-x_0) \quad \text{y} \quad f_2(x_0) = f_2(-x_0).$$

Consideremos dos casos. Si $f_1(x_0) \neq 0$ y $f_2(x_0) \neq 0$, entonces $x_0 \notin A_1 \cup A_2$, por lo que $x_0 \in A_3$. Para este x_0, sin embargo, tenemos

$$f_1(-x_0) \neq 0 \text{ y } f_2(-x_0) \neq 0,$$

de donde $-x_0 \in A_3$.

En el otro caso, supongamos que $f_1(x_0) = f_1(-x_0) = 0$. Entonces $x_0, -x_0 \in A_1$. □

Corolario 11.6.18. *Ninguna función continua $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ es biyectiva para $n \neq 2$. En particular, $\mathbb{R}^n \ncong \mathbb{R}^2$ para $n \neq 2$.*

Demostración. Sea $n > 2$. Consideramos la esfera $\mathbb{S}^2$ encajada canónicamente en $\mathbb{R}^n$, i.e.

$$\mathbb{S}^2 = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \|(x_1, \ldots, x_n)\| = 1, \text{ y } x_4 = \ldots = x_n = 0\}.$$

Entonces por el corolario anterior, la restricción $\varphi = f|_{\mathbb{S}^2}$ no es biyectiva. □

Nota. En realidad, $\mathbb{R}^n \ncong \mathbb{R}^m$ para $n \neq m$. Esto se pude demostrar de la misma manera usando los grupos de homotopía de las dimensiones correspondienes (más altas).

11.7. Ejercicios del Capítulo

1. Sea $p : X \to Y$ un mapeo cubriente. Demuestra que para todo $y \in Y$, el subespacio $p^{-1}(y)$ es discreto.
2. Demuestra que si $p : Y \to Z$ es un mapeo cubriente, tal que $p(y_0) = z_0$ para un par de puntos $y_0 \in Y$ y $z_0 \in Z$, entonces existe una función suprayectiva $\Phi : \pi_1(Z, z_0) \to p^{-1}(z_0)$. Mas aún, demuestra que si Y es simplemente conexo, entonces puede construirse una biyección.
3. Demuestra que el grupo fundamental de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ es isomorfo a $(\mathbb{Z}, +)$.
4. Da un ejemplo de un espacio topológico X y de dos puntos $x, y \in X$ tales que $\pi_1(X, x)$ no sea isomorfo a $\pi_1(X, y)$.
5. Sea X un espacio topológico y $x \in X$ un punto arbitrario.
   a) Si X es discreto ¿qué es $\pi_1(X, x)$?
   b) Si X es indiscreto ¿qué es $\pi_1(X, x)$?
6. Sea $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ una función continua que no es homotópica a la función identidad. Demuestra que existe $x \in \mathbb{S}^1$ tal que $f(x) = -x$. ¿Qué puedes decir si f es homotópica a la identidad.
7. Demuestra que si el grupo fundamental del círculo fuera trivial, entonces el grupo fundamental de cualquier espacio topológico sería trivial.
8. Denotemos por $\mathbb{B}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 | \|x\| \leq 1\}$ al disco unitario. Sea $\partial\mathbb{B}^2$ su frontera. Demuestra que si $h : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}^2$ es un homeomorfismo, entonces $h(\partial\mathbb{B}^2) = \partial\mathbb{B}^2$.
9. Demuestra que la retracción r del Lema 11.6.7 está bien definida.

10. Demuestra que $\alpha_1 * \ldots * \alpha_n$ en el Teorema 11.6.9, constituye una reparametrización de α.
11. ¿Es cierto el Teorema de Borsuk-Ulam para el toro? Es decir, si $f : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ es continua entonces $f(x, y) = f(-x, -y)$ para algún par $(x, y) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.
12. ¿Es cierto que todo lazo suprayectivo $f : I \to \mathbb{S}^1$ no es nulhomótopo?
13. Demostrar que si $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, $n \geq 0$ es continua y no suprayectiva entonces $f(x) = f(-x)$ para algún $x \in \mathbb{S}^n$.

Capítulo 12

Espacios cubrientes

12.1. La acción del grupo fundamental en las fibras de un cubriente

Teorema 12.1.1. *Sean $p : E \to B$ una función cubriente y $q \in B$. Entonces el grupo fundamental $\pi(B, q)$ actúa transitivamente (por la derecha) en la fibra $p^{-1}(q) \subset E$ mediante $\alpha : p^{-1}(q) \times \pi(B, q) \to p^{-1}(q)$:*

$$\alpha(\widetilde{q}, [f]) = \widetilde{q}[f] = \widetilde{f}(1) \tag{32}$$

donde $\widetilde{f}$ es el levantamiento de f que empieza en $\widetilde{q} \in p^{-1}(q)$.

Demostración. Sabemos que dos levantamientos $\widetilde{f_1}$ y $\widetilde{f_2}$ de dos trayectorias f_1 y f_2 que empiezan en $\widetilde{q}$ son homótopas si f_1 y f_2 lo son. En particular, la función (32) está biendefinida. Verifiquemos que α es en verdad una acción:

1. $\widetilde{q}[e_q] = e_{\widetilde{q}}(1) = \widetilde{q}$ pues la constante $e_{\widetilde{q}}$ es levantamiento de la constante e_q.
2. $(\widetilde{q}[f])[g] = \widetilde{g}(1)$ donde $\widetilde{g}$ es el levantamiento de g que empieza en $\widetilde{q}[f]$. Como $\widetilde{q}[f] = \widetilde{f}(1)$ donde $\widetilde{f}$ es el levantamiento de f que empieza en q, basta observar que $\widetilde{f} * \widetilde{g}$ es un levantamiento de $f * g$ que empieza en q, por lo que
$$\widetilde{q}([f][g]) = \widetilde{f} * \widetilde{g}(1) = \widetilde{g}(1) = (\widetilde{q}[f])[g].$$

Además, dados $\widetilde{q}_1, \widetilde{q}_2 \in p^{-1}(q)$, tomemos una trayectoria $\widetilde{f} : I \to E$ de $\widetilde{q}_1$ a $\widetilde{q}_2$. Entonces $p\widetilde{f}$ es un lazo en q y $\widetilde{f}$ su levantamiento, de modo que $\widetilde{q}_1[p\widetilde{f}] = \widetilde{f}(1) = \widetilde{q}_2$. □

Capítulo 13

Espacios Cubrientes

Como se vio en el capítulo anterior, utilizando algunas propiedades de espacios cubrientes pudimos calcular el grupo fundamental de la circunferencia. En este capítulo haremos exactamente lo contrario, es decir, deduciremos propiedades de los espacios cubrientes a través del grupo fundamental.

La teoría de proyecciones cubrientes es de gran importancia, no sólo en la topología sino en diversas ramas de las matemáticas como el Análisis Complejo, la Geometría Diferencial y la Teoría de los Grupos de Lie, entre otras.

Uno de los resultados más importantes que vamos a mostrar en este capítulo es que si $p : \widetilde{X} \to X$ es una proyección cubriente, entonces el problema de la existencia de un levantamiento de una función continua $f : A \to X$ a una función $\widetilde{f} : A \to \widetilde{X}$, tiene solución en términos de los grupos fundamentales de A, X y $\widetilde{X}$.

Definición 13.0.2. *Sea $p : \widetilde{X} \to X$ una función continua. Se dice que un conjunto abierto $U \subset X$ está* ***uniformemente*** *cubierto por p, si*

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\alpha \in A} V_\alpha$$

donde $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es una familia de subconjuntos abiertos de $\widetilde{X}$ disjuntos dos a dos y tales que, para cada $\alpha \in A$, la restricción $p|_{V_\alpha} : V_\alpha \to U$ es un homeomorfismo. En este caso llamaremos a U ***vecindad admisible****.*

En general, la representación con abiertos disjuntos $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\alpha\in A} V_\alpha$ no es única, pero si U es conexo, entonces existe una única forma de representar a $p^{-1}(U)$ como unión disjunta de abiertos $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ tal que cada V_α es homeomorfo por medio de $p|_{V_\alpha}$ a U.

Si U es conexo, entonces las vecindades V_α son las componentes conexas de $p^{-1}(U)$. En efecto, como para cada $\alpha \in A$, V_α es un abierto en $\widetilde{X}$ entonces es abierto también en $p^{-1}(U)$, además los abiertos de $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ son disjuntas dos a dos, por lo tanto cada V_α es cerrado en $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\alpha\in A} V_\alpha$. Además, cada V_α es conexo al ser homeomorfo a U, de donde concluimos que cada V_α es una componente conexa de $p^{-1}(U)$.

A partir del concepto de vecindad admisible, definimos lo que es una *proyección cubriente*:

Definición 13.0.3. *Sea $p : \widetilde{X} \to X$ una función continua, decimos que p es una función (o proyección)* ***cubriente*** *si cada $x \in X$ tiene una vecindad abierta de U_x admisible (Definición 13.0.2). En este caso, decimos que $\widetilde{X}$ es un espacio cubriente de X por medio de p, mientras que a X se le denota como la base de la proyección cubriente p.*

Ejemplo 13.0.1. La función exponencial $e : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ definida por

$$e(t) = e^{2\pi i t}, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}$$

es cubriente, tomando $U_1 = \mathbb{S}^1 \setminus \{-1\}$ como vecindad admisible para puntos en la circunferencia distintos de -1, pues

$$e^{-1}(U_1) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} (n - 1/2, n + 1/2)$$

y la restricción $e|_{(n-1/2,n+1/2)} : (n-1/2, n+1/2) \to U_1$ es un homemorfismo. De forma análoga, tomando $U_2 = \mathbb{S}^1 \setminus \{1\}$ vemos que esta es una vecindad admisible de -1

Ejemplo 13.0.2. Sea $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ definimos la función $p_n : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ como

$$p_n(z) := z^n.$$

Queda como ejercicio para el lector comprobar que para todo $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, p_n es cubriente.

En uno de los ejercicios del capítulo se le pedirá al lector probar que el producto de proyecciones cubriente es también una proyección cubriente. Con esto en mente podemos examinar el siguiente ejemplo, que es bastante interesante.

Ejemplo 13.0.3. La función exponencial $e : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definida por:

$$e^z := 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

es una proyección cubriente: sea $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$ tenemos que $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$. Además, sabemos que: $e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ es un homemorfismo (que, en particular es cubriente) y que $e^{iy} : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ es cubriente.

Como $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es homemorfo a $\mathbb{C}$, entonces la función $e^x \times e^{iy} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^1$ es una proyección cubriente. Ahora sólo queda notar que la función $\phi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ dada por:

$$\phi(\rho, e^{i\theta}) := \rho e^{i\theta}$$

es un homeomorfismo. Se queda como ejercicio para el lector verificar que en efecto ϕ es un homeomorfismo.

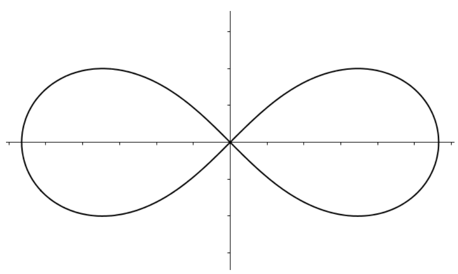
Con esto tenemos que la función e^z es cubriente.

Ejemplo 13.0.4. La Lemiscata (o figura ocho)

Sean $X = \{(z, w) \in \mathbb{S}^1 \times S^1 \mid z = 1 \quad o \quad w = 1\}$ y $\widetilde{X} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Z} \quad o \quad y \in \mathbb{Z}\}$ y sea $p : \widetilde{X} \to X$ definida por:

$$p(x, y) = (e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy})$$

entonces, p es una proyección cubriente.



Definición 13.0.4. *Sea $f : X \to Y$ una función continua, f es un **homeomorfismo local** si todo punto $x \in X$ posee una vecindad U_x tal que $f(U_x)$ es abierto en Y y la restricción*

$$f|_{U_x} : U_x \to f(U_x)$$

es un homeomorfismo.

De la definición es fácil notar que toda proyección cubriente es un homeomorfismo local. En efecto, sean $p : \widetilde{X} \to X$ una proyección cubriente, $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ y $x = p(\widetilde{x})$. Como p es cubriente, entonces existe U_x una vecindad admisible de x, entonces $p^{-1}(x) = \bigsqcup_{i \in I} V_i$, donde para cada $i \in I$, V_i es abierto en $\widetilde{X}$ y $p|_{V_i} : V_i \to U_x$ es un homeomorfismo. Tenemos también que $\widetilde{x} \in V_j$ para alguna $j \in I$ pues $p(\widetilde{x}) = x \in U_x$. Como, para todo $i \in I$, V_i es abierto, tenemos que V_j es la vecindad deseada.

Con esto, tenemos que todas la propiedades de homeomorfismos locales también son propiedades de las proyecciones cubrientes. La siguente proposición nos otorgará una de estas propiedades.

Proposición 13.0.5. *Todo homeomorfismo local $f : X \to Y$ es una función abierta.*

Demostración. Sea $V \subset X$ abierto y sea $y \in f(V)$, entonces $y = f(v)$ para algún $v \in V$, f es homeomorfismo local por lo que existe $U_v \subset X$ abierto tal que $v \in U_v$, $f(U_v)$ es abierto en Y y $f|_{U_v} : U_v \to f(U_v)$ es un homeomorfismo. Como $f|_{U_v}$ es un homemorfismo restringido a U_v, entonces $f(U_v \cap V) = f|_{U_v}(V)$ es abierto en $f(U_v)$. Como $f(U_v)$ es abierto en Y, entonces se tiene que $f(U_v \cap V)$ es abierto en Y, además teníamos que $v \in V$ y $v \in U_v$ por lo que $y = f(v) \in f(U_v \cap V) \subset f(V)$, lo que implica que $f(V)$ es abierto en Y, por lo que f es una función abierta. $\square$

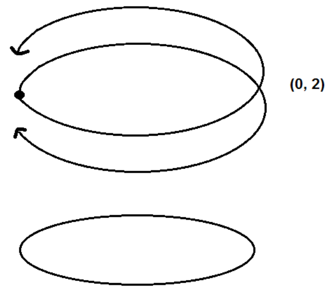
Corolario 13.0.6. *Toda proyección cubriente es una función abierta.*

Ejemplo 13.0.5. Observemos que no todo homeomorfismo local es una proyección cubriente. En efecto, sea $f : (0, 2) \to \mathbb{S}^1$ dada por

$$f(t) = e^{2\pi it}$$

entonces f es un homeomorfismo local, pero no es cubriente ya que $1 \in \mathbb{S}^1$ no tiene vecindades admisibles, pues si U_1 es una vecindad 1 distinta de $\mathbb{S}$ entonces $p^{-1}(U_1)$ tiene al menos tres componentes conexas, por otro lado, existe un $\varepsilon < 1/2$ distinto de cero tal que $U_1' = \{e^{2\pi it} \mid t \in (-\varepsilon, \varepsilon)\} \subset U_1$ es una vecindad de 1, sea V_ε la componente conexa de $p^{-1}(U_1)$ que contiene a ε, entonces $p^{-1}(U_1') \cap V_\varepsilon = p|_{V_\varepsilon}^{-1}(U_1') = (0, \varepsilon)$, por lo que $p|_{V_\varepsilon}(p|_{V_\varepsilon}^{-1}(U_1')) \neq U_1'$, por lo tanto $p|_{V_\varepsilon}$ no es biyección sobre U_1, entonces no es homeomorfismo.

El ejemplo anterior también nos dice que no siempre la restricción de un mapeo cubriente es cubriente. La siguiente proposición nos dice en qué tipo de conjuntos la restricción de un mapeo cubriente es cubriente.



Proposición 13.0.7. *Sea* $p : \widetilde{X} \to X$ *una proyección cubriente y sea* $A \subset X$ *un subconjunto localmente conexo. Si* $\widetilde{A}$ *es una componente conexa de* $p^{-1}(A)$*, entonces la restricción:*

$$p|_{\widetilde{A}} : \widetilde{A} \to A$$

es una proyección cubriente.

Demostración. Sea $a \in A$, entonces a tiene una vecindad U admisible, por lo tanto:

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} U_i$$

donde $U_i \cap U_j = \varnothing$ si $i \neq j$ y cada U_i es homeomorfo a U por medio de $p|_{U_i}$, tenemos también que $p^{-1}(U \cap A) = \bigsqcup_{i \in I}(U_i \cap p^{-1}(A))$ donde, para cada $i \in I$, $p|_{U_i \cap p^{-1}(A)} : U_i \cap p^{-1}(A) \to U \cap A$ es un homeomorfismo.

Como A es localmente conexo, para cada $a \in A \cap U$ podemos encontrar una vecindad conexa V de A tal que $a \in V \subset (A \cap U)$, entonces $p^{-1}(V) = \bigsqcup_{i \in I} V_i \subset \bigsqcup_{i \in I} U_i \cap p^{-1}(A) \subset p^{-1}(A)$, puesto que cada V_i es homeomorfo por medio de $p|_{V_i}$ a V, tenemos que cada V_i es conexo, por lo tanto, si $V_i \cap \widetilde{A} \neq \varnothing$, como V_i es conexo y $\widetilde{A}$ es una componente de conexidad, sucede que $V_i \subset \widetilde{A}$ por lo que $p|_{\widetilde{A}}^{-1}(V) = p^{-1}(V) \cap \widetilde{A} = \bigsqcup_{j \in J} V_j$ donde $J = \{j \in I \mid V_j \subset \widetilde{A}\}$. De aquí que $p|_{\widetilde{A}} : \widetilde{A} \to A$ es cubriente. $\square$

Teorema 13.0.8. *Si* X *es conexo y* $p : \widetilde{X} \to X$ *es una proyección cubriente, entonces* $|p^{-1}(x)| = |p^{-1}(y)|$ *para todo par de puntos* $x, y \in X$*,.*

Demostración. Sea $x \in X$, denotamos por

$$A := \{y \in X \mid |p^{-1}(y)| = |p^{-1}(x)|\}$$

Notemos que $A \neq \varnothing$ pues $x \in A$. Afirmamos que A es un conjunto abierto y cerrado. En efecto, si $y \in A$, como p es cubriente, entonces y tiene una vecindad U_y admisible, por lo que:

$$p^{-1}(U_y) = \bigsqcup_{i \in I} V_i$$

Donde V_i es homeomorfo a U_y por medio de $p|_{V_i}$ para cada $i \in I$. Es claro que si $z \in U_y$, entonces la fibra de z, $p^{-1}(z)$, tiene cardinalidad $|I|$, pues cada V_i tiene exactamente un elemento de la fibra de z. Como tenemos exactamente $|I|$ vecindades, se sigue que $|p^{-1}(z)| = |I| = |p^{-1}(y)| = |p^{-1}(x)|$ de aquí que $y \in U_y \subset A$. Por lo tanto, A es abierto en X.

De manera análoga $X \setminus A$ es abierto. Efectivamente, si $w \in X \setminus A$ entonces $|p^{-1}(w)| \neq |p^{-1}(x)|$. Sea v_w una vecindad admisible de w; entonces, por el mismo argumento que en el caso pasado, tenemos que para todo $v \in V_w$, $|p^{-1}(v)| = |p^{-1}(w)|$. Por lo tanto $w \in V_w \subset X \setminus A$, de aquí se sigue que A es cerrado. Como X es conexo y $A \neq \varnothing$ es abierto y cerrado, concluimos que $A = X$. □

Definición 13.0.9. *Sea X un espacio conexo y $p : \widetilde{X} \to X$ una proyección cubriente, definimos al **número de hojas** de $\widetilde{X}$ sobre X como la cardinalidad de $p^{-1}(x)$, donde x es algún elemento de X.*

13.1. Levantamiento de Funciones

Problema de levantamiento: Sean X, $\widetilde{X}$ y A tres espacios topológicos y $p : \widetilde{X} \to X$ una función continua y suprayectiva. Supongamos que tenemos una función continua $f : A \to X$. ¿Será posible encontrar una función continua $\widetilde{f} : A \to \widetilde{X}$ que haga conmutar al siguiente diagrama (es decir, que $p \circ \widetilde{f} = f$)?

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \\ A \arrow[ur, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

Esta pregunta puede tener o no una respuesta afirmativa. Cuando exista tal función $\widetilde{f}$, diremos que esta función es un levantamiento de f.

En esta sección responderemos esta pregunta en el caso en el que la función p es un mapeo cubriente.

Recordemos que los casos en los que f es una trayectoria o una homotopía, la respuesta es afirmativa. Estas afirmaciones fueron demostradas previamente, aquí las mencionamos como un recoradatorio:

Teorema 13.1.1. (Levantamiento de trayectorias) *Sea $p : \widetilde{X} \to X$ un proyección cubriente, $x_0 \in X$ y $\widetilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, entonces toda trayectoria*

$f : I \to X$ con $f(0) = x_0$ tiene un único levantamiento $\widetilde{f} : I \to \widetilde{X}$ tal que $\widetilde{f}(0) = \widetilde{x}_0$.

Teorema 13.1.2. (Levantamiento de homotopías) *Sea $p : \widetilde{X} \to X$ un proyección cubriente, $x_0 \in X$ y $\widetilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, entonces toda homotopía $F : I \times I \to X$ con $F(0,0) = x_0$ tiene un único levantamiento $\widetilde{F} : I \times I \to \widetilde{X}$ tal que $\widetilde{F}(0,0) = \widetilde{x}_0$. Si F es homotopía relativa a $\{0,1\}$, entonces $\widetilde{F}$ también lo es.*

Teorema 13.1.3. (Monodromía). *Sea $p : \widetilde{X} \to X$ una proyección cubriente, $x_0, x_1 \in X$, $\widetilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, f y g dos trayectorias en X entre x_0 y x_1, y sean $\widetilde{f}$ y $\widetilde{g}$ los levantamientos de f y g, respectivamente, tales que: $\widetilde{f}(0) = \widetilde{g}(0) = \widetilde{x}_0$. Si f y g son homotópicas como trayectorias, entonces también $\widetilde{f}$ y $\widetilde{g}$ lo son. En particular, $\widetilde{f}(1) = \widetilde{g}(1)$.*

Corolario 13.1.4. *Si $p : \widetilde{X} \to X$ es una proyección cubriente, $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ y $x = p(\widetilde{x})$, entonces el homomorfismo inducido por p, $p_* : \pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}) \to \pi(X, x)$, es un monomorfismo de grupos y la imagen de p_* es el subgrupo de $\pi(X, x)$ que consta de las clases de homotopía de los lazos en (X, x), cuyos levantamientos en $\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x})$ son lazos.*

Demostración. Sea $\widetilde{\gamma_0}$ un lazo en $(\widetilde{X}, \widetilde{x})$ tal que $[\widetilde{\gamma_0}] \in \mathrm{Ker}(p_*)$, entonces $p_*[\gamma_0] = [e_x]$, es decir, $p \circ \widetilde{\gamma_0} \simeq e_x$ donde e_x es el lazo constante $x = p(\widetilde{x})$ en X.
Como los levantamientos de trayectorias en un punto son únicos, entonces el único levantamiento de e_x en $\widetilde{x}$ es el lazo constante $e_{\widetilde{x}}$ y el levantamiento de $p \circ \widetilde{\gamma_0}$ es $\widetilde{\gamma_0}$. Consecuentemente, por el teorema de monodromía, tenemos que $[\widetilde{\gamma_0}] = [e_{\widetilde{x}}]$ que es la identidad en $\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x})$, por lo que p_* es un monomorfismo.

Por otro lado, sea $[\beta] \in \mathrm{Im}(p_*)$, entonces existe un lazo $\widetilde{\alpha}$ de $(\widetilde{X}, \widetilde{x})$ tal que $[\beta] = [p \circ \widetilde{\alpha}]$, es decir $\beta \simeq p \circ \widetilde{\alpha}$. Claramente, $\widetilde{\alpha}$ es el levantamiento de $p \circ \widetilde{\alpha}$ en $\widetilde{x}$, entonces, si denotamos por $\widetilde{\beta}$ al levantamiento de β en $\widetilde{x}$, por el Teorema de Monodromia, los levantamientos $\widetilde{\alpha}$ y $\widetilde{\beta}$ son homotópicos como trayectorias por lo que, como $\widetilde{\alpha}$ es un lazo, entonces $\widetilde{\beta}$ es un lazo.

Además, si β es un lazo de X en x tal que su levantamiento $\widetilde{\beta}$ en $\widetilde{x}$ es un lazo de $\widetilde{X}$ en $\widetilde{x}$, entonces $p_*([\widetilde{\beta}]) = [\beta]$. De aquí que $\mathrm{Im}(p_*)$ es el subgrupo de las clases de homotopía de los lazos de X en x cuyos levantamientos son lazos. $\square$

En general, no cualquier función continua acepta un levantamiento. A continuación se presenta un ejemplo de esto.

Ejemplo 13.1.1.

La función identidad:

$$Id : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$$

no tiene levantamiento respecto a la proyección exponencial $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$. tal que $p(t) = e^{2\pi i t}$.

Pues, si suponemos que $\varphi : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ es un levantamiento de Id, φ tiene que ser inyectiva, pues $p \circ \varphi = Id$ lo es. Además, φ es cerrada, pues $\mathbb{S}^1$ es compacto y $\mathbb{R}$ es Hausdorff. De aquí que $\varphi : \mathbb{S}^1 \to \varphi(\mathbb{S}^1) \subset \mathbb{R}$ es un homeomorfismo.

Como $\mathbb{S}^1$ es un espacio compacto y conexo, entonces $\varphi(\mathbb{S}^1) \subset \mathbb{R}$ es un intervalo cerrado, lo cual es una contradicción, pues la circunferencia no es homeomorfa a ningún intervalo de $\mathbb{R}$

El ejemplo anterior nos muestra que, para resolver el problema del levantamiento de funciones, las condiciones necesarias y suficientes que debe cumplir una función para tener un levantamiento respecto a una proyección cubriente, no necesariamente son triviales.

El siguiente teorema nos mostrará que el problema del levantamiento tiene solución en términos de los grupos fundamentales de los espacios en cuestión. Este es el ejemplo típico de los métodos que se utilizan en la topología algebraica, donde se reducen problemas topológicos a problemas algebraicos más fáciles de resolver.

Teorema 13.1.5. (Levantamiento de funciones)

Sean X un espacio localmente conexo por trayectorias, $p : \widetilde{X} \to X$ una proyección cubriente, A un espacio conexo y localmente conexo por trayectorias y $f : A \to X$ una función continua, entonces, dados los puntos$a_0 \in A$, $x_0 \in X$ y $\widetilde{x_0} \in \widetilde{X}$ tales que $f(a_0) = x_0 = p(\widetilde{x_0})$, existe un levantamiento $\widetilde{f} : A \to \widetilde{X}$ tal que $\widetilde{f}(a_0) = \widetilde{x_0}$ si y sólo si:

$$f_*(\pi(A, a_0)) \subset p_*(\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})$$

En tal caso, el levantamiento $\widetilde{f}$ es único.

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea $\widetilde{f}$ un levantamiento de f, entonces tenemos que $f_* = (p \circ \widetilde{f})_* = p_* \circ \widetilde{f}_*$

$$\begin{tikzcd}
& \pi(\widetilde{X},\widetilde{x_0}) \arrow[d, "p_*"] \\
\pi(A,a_0) \arrow[ur, "\widetilde{f}_*"] \arrow[r, "f_*"] & \pi(X,x_0)
\end{tikzcd}$$

Por lo que $f_*(\pi(A,a_0)) = p_*(\widetilde{f}_*(\pi(A,a_0))) \subset p_*(\pi(\widetilde{X},\widetilde{x_0}))$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $f_*(\pi(A,a_0)) \subset p_*(\pi(\widetilde{X},\widetilde{x_0})$, demostraremos que existe un levantamiento $\widetilde{f}$ de f. Sea $a \in A$, como A es conexo por trayectorias existe una trayectoria $\alpha : a_0 \sim a$, por lo que $f \circ \alpha$ es una trayectoria en X que comienza en x_0. Por el teorema de levantamiento de trayectorias, existe un único levantamiento $\widetilde{\alpha}$ de $f \circ \alpha$ tal que $\widetilde{\alpha}(0) = \widetilde{x_0}$. Definimos:

$$\widetilde{f}(a) := \widetilde{\alpha}(1)$$

Veamos que $\widetilde{f}(a)$ no depende de la trayectoria α. Sea $\beta : a_0 \sim a$ una tayectoria que une a_0 con a, y sea $\widetilde{\beta}$ el levantamiento de la curva $f \circ \beta$ que comienza en $\widetilde{x_0}$. Queremos probar que $\widetilde{\alpha}(1) = \widetilde{\beta}(1)$

Observemos que $\alpha * \overline{\beta}$ es un lazo en (A, a_0). Por hipótesis tenemos que $[f(\alpha * \overline{\beta})] \in p_*(\pi(\widetilde{X},\widetilde{x_0}))$, entonces por el Corolario (13.1.4), el levantamiento de $f(\alpha * \overline{\beta})$ es un lazo en $(\widetilde{X},\widetilde{x_0})$. Notemos también que $f(\alpha * \overline{\beta}) = (f \circ \alpha) * (\overline{f \circ \beta})$. Sea ω el levantamiento de $f(\alpha * \bar{\beta})$, tenemos que

$$p \circ \omega = (f \circ \alpha) * (\overline{f \circ \beta}) \tag{33}$$

Sean ω_1 y ω_2, dos trayectorias en $\widetilde{X}$, tales que $\omega_1(t) = \omega(t/2)$ y $\omega_2(t) = \omega(1/2 + t/2)$ para todo $t \in [0,1]$, entonces $\omega = \omega_1 * \omega_2$. Para cada $t \in [0,1]$, tenemos que $t/2 \in [0, 1/2]$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
p \circ \omega_1(t) &= p \circ \omega(t/2) \\
&= (f \circ \alpha) * \overline{(f \circ \beta)}(t/2) \text{ por } (33) \\
&= f \circ \alpha(2t/2) \\
&= f \circ \alpha(t)
\end{aligned}$$

De aquí que ω_1 es el levantamiento de $f \circ \alpha$ en $(\widetilde{X},\widetilde{x_0})$, como $\widetilde{\alpha}$ es también levantamiento de $f \circ \alpha$ en $(\widetilde{X},\widetilde{x_0})$, por la unicidad de los levantamientos tenemos que $\omega_1 = \widetilde{\alpha}$, en particular $\omega(1/2) = \omega_1(1) = \widetilde{\alpha}(1)$.

De manera ánaloga ω_2 es el levantamiento de $\overline{f \circ \beta}$. En efecto,

$$\begin{aligned}
p\circ\omega_2(t) &= p\circ\omega(1/2+t/2)\\
&= (f\circ\alpha)*\overline{(f\circ\beta)}(1/2+t/2) \text{ por } (33)\\
&= \overline{(f\circ\beta)}(2(1/2+t/2)-1)\\
&= \overline{(f\circ\beta)}(t)
\end{aligned}$$

pues $1/2+t/2\in[1/2,1]$.

Luego, $p\circ\overline{\omega_2}(t) = p\circ\omega_2(1-t) = \overline{(f\circ\beta)}(1-t) = f\circ\beta(t)$. Así $\overline{\omega_2}$ es levantamiento de $f\circ\beta$ que comienza en $\widetilde{x_0}$, por lo que $\widetilde{\beta}=\overline{\omega_2}$ de aquí que $\widetilde{\beta}(1) = \overline{\omega_2}(1) = \omega_2(0) = \omega(1/2) = \omega_1(1) = \widetilde{\alpha}(1)$, por lo que la función $\widetilde{f}: A\to\widetilde{X}$ está bien definida. Además, para toda $a\in A$, $p\circ\widetilde{f}(a) = p\circ\widetilde{\alpha}(1) = f\circ\alpha(1) = f(a)$ y $\widetilde{f}(a_0)=\widetilde{x_0}$. Sólo falta demostrar que $\widetilde{f}$ es continua.

Sea $a\in A$, entonces, sean O una vecindad del punto $\widetilde{f}(a)$ en $\widetilde{X}$, $\alpha: I\to A$ una trayectoria entre a_0 y a y $\widetilde{\alpha}$ el levantamiento de $f\circ\alpha$ que comienza en x_0, tenemos que $\widetilde{f}(a)=\widetilde{\alpha}(1)$. Como por hipótesis X es localmente conexo por trayectorias, concideremos a U una vecindad conexa por trayectorias de $f(a)$ que esté contenida en $p(O)$ y que además sea una vecindad admisible de $f(a)$; como $p\circ\widetilde{f}(a) = f(a)$, entonces $\widetilde{f}(a)\in p^{-1}(f(a))$.

Sea V_0 la componente de $p^{-1}(U)$ que contiene a $\widetilde{f}(a)$, tenemos que $V_0\subset O$, ya que $p(V_0)=U\subset p(O)$. Así, la restricción $p_0 := p|_{V_0}: V_0\to U$ es un homeomorfismo. Sea $W\subset f^{-1}(U)$ una vecindad de a abierta y conexa por trayectorias, afirmamos que $\widetilde{f}(W)\subset V_0\subset O$.

Si $y\in W$, entonces existe una trayectoria γ contenida en W que une al punto a con el punto y. Además, la imágen de $f\circ\gamma$ está contenida en U, por lo que la trayectoria $\delta = p_0^{-1}\circ f\circ\gamma$ está bien definida y es un levantamiento de $f\circ\gamma$ que parte de $\widetilde{f}(a)$, por lo que $\widetilde{\alpha}*\delta$ es el levantamiento de $f\circ(\alpha*\gamma)$ que parte de $\widetilde{x_0}$ y que acaba en $\delta(1)\in V_0$. Por definición, $\widetilde{f}(y) = \alpha*\delta(1) = \delta(1)\in V_0\subset O$. Por lo tanto, $\widetilde{f}(W)\subset V_0\subset O$. De aquí se sigue que $\widetilde{f}$ es continua.

Para la unicidad, supongamos que $\widetilde{f}$ y $\widetilde{g}$ son dos levantamientos de f tales que $\widetilde{f}(a_0)=\widetilde{g}(a_0)=x_0$. Si $a\in A$, sea α una trayectoria que va desde a_0 hasta a, entonces, como $p\circ\widetilde{f}\circ\alpha = p\circ\widetilde{g}\circ\alpha = f\circ\alpha$ y $\widetilde{f}\circ\alpha(0) = \widetilde{f}(a_0) = x_0 = \widetilde{g}(a_0) = \widetilde{g}\circ\alpha(0)$, tenemos que $\widetilde{f}\circ\alpha$ y $\widetilde{g}\circ\alpha$ son ambos levantamientos de la trayectoria $f \circ \alpha$ con inicio en x_0, por lo tanto $\widetilde{f} \circ \alpha = \widetilde{g} \circ \alpha$. En particular, $\widetilde{f}(a) = \widetilde{f} \circ \alpha(1) = \widetilde{g} \circ \alpha(1) = \widetilde{g}(a)$. De aquí que necesariamente $\widetilde{f} = \widetilde{g}$.

□

13.2. Clasificación de espacios cubrientes

Definición 13.2.1. *Sean $p_1 : X_1 \to X$ y $p_2 : X_2 \to X$ dos proyecciones cubrientes. A una función continua $h : X_1 \to X_2$ se le llama **morfismo entre espacios cubrientes** si $p_2 \circ h = p_1$.*

*Si además h es un homeomorfismo, entonces h es un **isomorfismo de espacios cubrientes**.*

Desde el punto de vista de la teoría de espacios cubrientes, a dos espacios cubrientes sobre una misma base se les considera idénticos si existe un isomorfismo entre ellos.

El siguinte teorema nos dirá cuándo dos espacios cubrientes son isomorfos.

Teorema 13.2.2. *Sean X un espacio localmente conexo por trayectorias, X_1 y X_2 dos espacios conexos y localmente conexos por trayectorias, $p_1 : X_1 \to X$ y $p_2 : X_2 \to X$ dos proyecciones cubrientes y $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ tales que $p_1(x_1) = p_2(x_2)$, entonces existe un isomorfismo $h : X_1 \to X_2$ tal que $h(x_1) = x_2$ si y sólo si*

$$p_{1*}(\pi(X_1, x_1)) = p_{2*}(\pi(X_2, x_2))$$

Demostración. ($\Rightarrow$) Si existe tal homeomorfismo tal que $p_2 \circ h = p_1$ entonces, $p_{2*} \circ h_* = p_{1*}$. Además, h_* es un isomorfismo de grupos por lo que $p_{1*}(\pi(X_1, x_1)) = p_{2*}(h_*(\pi(X_1, x_1))) = p_{2*}(\pi(X_2, x_2))$.

($\Leftarrow$) Por el Teorema (13.1.5) (Levantamiento de Funciones), existe un levantamiento de la función $p_2 : X_2 \to X$, pues p_1 es una proyección cubriente y ocurre que $p_{2*}(\pi(X_2, x_2)) \subset p_{1*}(\pi(X_1, x_1))$. Sea $h : X_2 \to X_1$ el levantamiento de p_2, entonces $p_1 \circ h = p_2$ y $h(x_2) = x_1$, por lo tanto, h es un morfismo de espacios cubrientes.

En forma inversa, como $p_{1*}(\pi(X_1, x_1)) \subset p_{2*}(\pi(X_2, x_2))$, existe un morfismo cubriente $k : X_1 \to X_2$ tal que $k(x_1) = x_2$ y $p_2 \circ k = p_1$.

Consideremos la función $k \circ h : X_1 \to X_1$. Esta función es un levantamiento de p_1, ya que $p_1 \circ (k \circ h) = (p_1 \circ k) \circ h = p_2 \circ h = p_1$, además $(k \circ h)(x_1) = x_1$. Por otro lado, la función identidad Id_{X_1} también es un levantamiento de p_1, pues $p_1 = p_1 \circ Id_{X_1}$ y también cumple que $Id_{X_1}(x_1) = (x_1)$, entonces por la parte del Teorema 13.1.5, que afirma que hay unicidad en los levantamientos, $k \circ h = Id_{X_1}$. De forma análoga obtenemos que $h \circ k = Id_{X_2}$ con lo que aseguramos que h y k son isomorfismos entre espacios cubrientes. $\square$

Proposición 13.2.3. *Sean $\widetilde{X}$ un espacio conexo por trayectorias, $p : \widetilde{X} \to X$ una proyección cubriente, $x \in X$ y $a, b \in p^{-1}(x)$, entonces $p_*(\pi(\widetilde{X}, a))$ y $p_*(\pi(\widetilde{X}, b))$ son subgrupos conjugados de $\pi(X, x)$.*

Más aún, si $w \in p^{-1}(x)$, entonces todo subgrupo conjugado de $p_*(\pi(\widetilde{X}, w))$ es igual al subgrupo $p_*(\pi(\widetilde{X}, z))$ para algún $z \in p^{-1}(x)$.

Demostración. Sea α una trayectoria que una a los puntos a y b, entonces la función

$$\Gamma_\alpha : \pi(\widetilde{X}, a) \to \pi(\widetilde{X}, b)$$

tal que

$$\Gamma_\alpha([\beta]) = [\alpha * \beta * \overline{\alpha}]$$

es un isomorfismo de grupos.

Consideremos al lazo $p \circ \alpha$ en (X, x) que define el isomorfismo

$$\varphi : \pi(X, x) \to \pi(X, x)$$

dado por

$$\varphi([\gamma]) := [p \circ \alpha][\gamma][p \circ \alpha]^{-1}.$$

Veamos que si $[\gamma] \in p_*(\pi(\widetilde{X}, a))$, entonces $\gamma = p \circ \beta$ para algún $\beta \in \pi(\widetilde{X}, a)$. Luego,

$$\begin{aligned} \varphi([\gamma]) &= \varphi \circ p_*([\beta]) \\ &= [p \circ \alpha][p \circ \beta][p \circ \alpha]^{-1} \\ &= [p \circ \alpha * p \circ \beta * p \circ \overline{\alpha}] \\ &= [p \circ (\alpha * \beta * \overline{\alpha})] \\ &= p_* \circ \Gamma_\alpha([\beta]) \end{aligned} \tag{34}$$

y el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \pi(\widetilde{X}, a) \arrow[r, "\Gamma_\alpha"] \arrow[d, "p_*"] & \pi(\widetilde{X}, b) \arrow[d, "p_*"] \\ \pi(X, x) \arrow[r, "\varphi"] & \pi(X, x) \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $[p \circ \alpha]\ p_*(\pi(\widetilde{X}, a))\ [p \circ \alpha]^{-1} = p_*(\pi(\widetilde{X}, b))$.

Para demostrar la segunda afirmación, supongamos que

$$H = [\gamma]\ p_*(\pi(\widetilde{X}, a))\ [\gamma]^{-1}$$

para algún $[\gamma] \in \pi(X, x)$.

Sea $\widetilde{\gamma}$ el levantamiento de γ que comienza en a y sea $b = \widetilde{\gamma}(1)$, entonces de la primera parte de la proposición se sigue que $p_*(\pi(\widetilde{X}, b)) = H$.

$\square$

Teorema 13.2.4. *Sean X un espacio localmente conexo por trayectorias, X_1 y X_2 dos espacios conexos y localmente conexos por trayectorias, $p_1 : X_1 \to X$ y $p_2 : X_2 \to X$ dos proyecciones cubrientes y $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ y $x \in X$ tales que $p_1(x_1) = x = p_2(x_2)$, entonces existe un isomorfismo $h : X_1 \to X_2$ si y sólo si $p_{1*}(\pi(X_1, x_1))$ y $p_{2*}(\pi(X_2, x_2))$ son conjugados.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Si $h : X_1 \to X_2$ es un isomorfismo de espacios cubrientes entonces, sea $y_2 = h(x_1)$, por el Teorema 13.2.2, tenemos que $p_{2*}(\pi(X_2, y_2)) = p_{1*}(\pi(X_1, x_1))$; por la proposicón (13.2.3), como $y_2,\ x_2 \in p_2^{-1}(x)$ (pues $p_1 = p_2 \circ h$), entonces $p_{2*}(\pi(X_2, y_2))$ y $p_{2*}(\pi(X_2, x_2))$ son conjugados por lo tanto, los grupos $p_{2*}(\pi(X_2, x_2))$ y $p_{1*}(\pi(X_1, x_1))$ son conjugados.

($\Leftarrow$) Si los grupos $p_{2*}(\pi(X_2, x_2))$ y $p_{1*}(\pi(X_1, x_1))$ son conjugados entonces, por la Proposición 13.2.3, existe $z \in p_1^{-1}(x)$ tal que

$$p_{2*}(\pi(X_2, x_2)) = p_{1*}(\pi(X_1, z))$$

Pero por el Teorema 13.2.2, existe un isomorfismo cubriente $h : X_1 \to X_2$ tal que $h(x_1) = z$. $\square$

Definición 13.2.5. (Cubriente Universal) *Sea X un espacio topológico y $p : \widetilde{X} \to X$ una proyección cubriente, si $\widetilde{X}$ es simplemente conexo, entonces decimos que $\widetilde{X}$ es un espacio **cubriente universal** de X.*

Note que cualesquiera dos espacios cubrientes universales de X son isomorfos y siempre existe un morfismo de un espacio universal a cualquier otro espacio cubriente.

Definición 13.2.6. *Un espacio X se llama **semilocalmente simplemente conexo** si para todo $x \in X$, existe una vecindad U de x tal que el homeomorfismo:*

$$i_* : \pi(U, x) \to \pi(X, x)$$

inducida por la inclusión $i : U \hookrightarrow X$ es trivial.

Teorema 13.2.7. *El espacio x tiene un espacio cubriente universal si y sólo si, X es conexo por trayectorias, localmente conexo por trayectorias y semilocalmente simplemente conexo.*

13.3. El Grupo de Deslizamientos

Definición 13.3.1. *Si $p : \widetilde{X} \to X$ es una proyección cubriente, entonces un* ***deslizamiento*** *es un homeomorfismo $h : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ tal que $p \circ h = p$.*

En otras palabras, un deslizamiento es un isomorfismo de un espacio cubriente en sí mismo. Otro nombre que se utiliza para los deslizamientos en la literatura matemática es el de **Trasformación Cubriente**.

Es evidente que el conjunto de todos los deslizamientos de $p : \widetilde{X} \to X$, al que denotaremos $D(p)$, constituye un **grupo** con respecto a la composición de funciones. Más adelante probaremos que el grupo $D(p)$ está completamente determinado por el grupo $\pi(X, x)$ y su subgrupo $p_*(\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x}))$.

De la definición se sigue que si $h : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ es un deslizamiento y $a \in p^{-1}(x)$, entonces $h(a) \in p^{-1}(x)$, es decir, la fibra de un punto $x \in X$ es invariante bajo deslizamientos. El deslizamiento h permuta elementos de la fibra.

Una pregunta que surge naturalmente es: dados dos puntos $a, b \in p^{-1}(x)$, ¿existirá un deslizamiento $h : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ tal que $h(a) = b$? Resulta que este deslizamiento no siempre existe, más adelante veremos un ejemplo de ello.

Definición 13.3.2. *Decimos que una proyección cubriente $p : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ es* ***normal****, si para cada $x \in X$ y cualesquiera dos puntos $a, b \in p^{-1}(x)$, existe un deslizamiento $h \in D(p)$ tal que $h(a) = b$.*

Teorema 13.3.3. *Sean X un espacio localmente conexo por trayectorias, $\widetilde{X}$ un espacio conexo y localmente conexo por trayectorias, $p : \widetilde{X} \to X$ una proyección cubriente, $x_0 \in X$ y $\widetilde{x_0} \in p^{-1}(x_0)$, entonces:*

- **i):** *$p : \widetilde{X} \to X$ es normal si y sólo si $p_*(\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}))$ es un subgrupo normal de $\pi(X, x_0)$.*
- **ii):** *$D(p)$ es isomorfo a $\frac{N(p_*(\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})))}{p_*(\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}))}$, donde $N(p_*(\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})))$ es el normalizador de $p_*(\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}))$.*

Demostración. **i)** Por definición $p_*(\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}))$ es normal si y sólo si

$$[\alpha]\ p_*(\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}))\ [\alpha]^{-1} = p_*(\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}))$$

para todo $[\alpha] \in \pi(X, x_0)$. Sea $\widetilde{\alpha}$ el levantamiento de α en $\widetilde{X}$ con origen en $\widetilde{x_0}$ y sea $\widetilde{x_1} = \widetilde{\alpha}(1)$, entonces por la Proposición 13.2.3,

$$[\alpha] p_*(\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}))[\alpha]^{-1} = p_*(\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_1}))$$

Así $p_*(\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}))$ es normal si y sólo si

$$p_*(\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})) = p_*(\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x})) \tag{35}$$

Para cualquier $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ que sea el fin de algún levantamiento $\widetilde{\alpha}$ de un lazo α. Pero como $\widetilde{X}$ es conexo por trayectorias, si $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ entonces, sea β una trayectoria entre $\widetilde{x_0}$ y $\widetilde{x}$, entonces β es levantamiento del lazo $p \circ \beta$ y $\widetilde{x}$ es el fin del lazo β. Por lo tanto $p_*(\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}))$ es un subgrupo normal si y sólo si la igualdad (35) se da para cualquier $\widetilde{x} \in p^{-1}(x_0)$. Por el Teorema 13.2.2, esto ocurre si y sólo si existe un isomorfismo (que en este caso es un deslizamiento) $\psi : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ tal que $\psi(\widetilde{x_1}) = \widetilde{x_0}$ para cualesquiera $\widetilde{x_0},\ \widetilde{x_1} \in p^{-1}(x_0)$ si y sólo si p es una proyección normal.

ii) Definimos una función:

$$\varphi : N(p_*(\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}))) \to D(p)$$

de la siguiente manera: Sea $[\alpha] \in N(p_*(\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})))$, entonces por lo mencionado anteriormente

$$p_*(\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})) = [\alpha]\ p_*(\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}))\ [\alpha]^{-1} = p_*(\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_1}))$$

donde $x_1 = \widetilde{\alpha}(1)$ con $\widetilde{\alpha}$ el levantamiento de α. Como vimos anteriormente, la igualdad (35) implica la existencia de un único deslizamiento $\mu \in D(p)$ tal que $\mu(\widetilde{x_0}) = \widetilde{x_1}$. Definimos $\varphi([\alpha]) = \mu$. Por la unicidad del deslizamiento μ y por el Teorema de Levantamiento de Trayectorias φ está bien definida.

Verifiquemos que φ es un morfismo de grupos:

Sean $[\alpha], [\beta] \in N(p_*(\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})))$, $\varphi([\beta]) = \nu$ y $\varphi([\alpha]) = \mu$, consideremos $\widetilde{\beta}$ y $\widetilde{\alpha}$ los levantamientos respectivos de β y α cuyo punto de inicio es $\widetilde{x_0}$, definimos $\widetilde{y_1} = \widetilde{\beta}(1) = \nu(x_0)$. Veamos que $\widetilde{\alpha}(1) = \mu(x_0) = \mu(\widetilde{\beta}(0))$, luego, el lazo $\alpha * \beta$ se levanta en la trayectoria $\widetilde{\alpha} * (\mu \circ \widetilde{\beta})$, ya que

$$\begin{aligned} p \circ \widetilde{\alpha} * (\mu \circ \widetilde{\beta}) &= (p \circ \widetilde{\alpha}) * (p \circ \mu \circ \widetilde{\beta}) \\ &= \alpha * (p \circ \widetilde{\beta}) \\ &= \alpha * \beta \end{aligned} \tag{36}$$

pues como μ es un deslizamiento, $p \circ \mu = p$. Así $\widetilde{\alpha} * (\mu \circ \widetilde{\beta})$ es el levantamiento de $\alpha * \beta$ que comienza en el punto $\widetilde{x_0}$ y termina en el punto $\mu(\widetilde{\beta}(1)) = \mu(\widetilde{y_1}) = \mu(\nu(\widetilde{x_0})) = \mu \circ \nu(\widetilde{x_0})$. Por definición $\varphi([\alpha][\beta])$ es el único deslizamiento de p que manda el punto $\widetilde{x_0}$ al término del levantamiento $\widetilde{\alpha * \beta} = \widetilde{\alpha} * (\mu \circ \widetilde{\beta})$, que es el punto $\mu \circ \nu(\widetilde{x_0})$, por lo tanto $\mu \circ \nu$ y $\varphi([\alpha][\beta])$ son deslizamientos que coinciden en el punto $\widetilde{x_0}$, por la unicidad de deslizamientos, $\varphi([\alpha][\beta]) = \mu \circ \nu = \varphi([\alpha]) \circ \varphi([\beta])$. De aquí que φ es un homomorfismo de grupos.

Ahora veamos φ que es suprayectivo:

Si $h \in D(p)$, sean $\widetilde{x} = h(\widetilde{x_0})$, $\widetilde{\alpha}$ una trayectoria que une a $\widetilde{x_0}$ con $\widetilde{x}$ y $\alpha = p \circ \widetilde{\alpha}$ entonces, por el Teorema 13.2.2,

$$p_*(\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})) = p_*(\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x})) = [\alpha]\ p_*(\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}))[\alpha]^{-1}$$

de donde $\alpha \in N(p_*(\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}))$, luego, $\varphi(\alpha) = h$ por lo que φ es suprayectiva.

Veamos ahora que el Nucleo de φ es $p_*(\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}))$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(\varphi) &= \{[\alpha] \in N(p_*(\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}))) \mid \varphi([\alpha]) = Id_{\widetilde{X}}\} \\ &= \{[\alpha] \in N(p_*(\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}))) \mid \text{El levantamiento de } \alpha \text{ es un lazo}\} \qquad (37) \\ &= p_*(\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})) \end{aligned}$$

la última igualdad se debe al Corolario 13.1.4. Por El Primer Teorema de Isomorfismos, concluimos que $D(p)$ es isomorfo a $\frac{N(p_*(\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_0})))}{p_*(\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}))}$.

□

Corolario 13.3.4. *Si p es una proyección normal, entonces $D(p)$ es isomorfo a $\pi(X, x_0)/p_*(\pi(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}))$.*

Corolario 13.3.5. *Si p es una proyección normal y $\widetilde{X}$ es simplemente conexo, entonces $D(p)$ es isomorfo a $\pi(X, x_0)$.*

13.4. Acciones de Grupos

Definición 13.4.1. *Sean X un conjunto y $(G, e, *)$ un grupo, decimos que G* ***actúa sobre*** *X si existe una función*

$$\alpha : G \times X \to X$$

(donde, por lo general, denotamos como gx a $\alpha(g, x)$)
tal que cumple las siguientes condiciones:

- **i):** *$ex = x$, para todo $x \in X$.*
- **ii):** *$(g * h)x = g(hx)$, para todo $x \in X$ y todo par $g, h \in G$*

*A la terna (G, X, α) se le llama $G-$**grupo** y a la afirmacón "G actúa sobre X con α" se le denota por $G \curvearrowright_\alpha X$.*

A veces, si la acción α está dada o no es relevante, se dice simplemente que X es un $G-$grupo y a la afirmación "G actúa sobre X" se denota como $G \curvearrowright X$.

*Si X es un espacio topológico y la acción $\alpha : G \times X \to X$ es continua dotando a G con la topología discreta, entonces decimos que X es un $G-$**espacio**.*

Note que si X es un $G-$espacio entonces, para todo $g \in G$, $g : X \to X$ dada por: $g(x) := gx$, es un homeomorfismo.

Definición 13.4.2. *Sea X un espacio topológico y G un grupo tal que $G \curvearrowright_\alpha X$, para todo $x \in X$, definimos los siguinetes conjuntos:*

i): $G(x) := \{gx \mid g \in G\} \subset X$ *se le llamama la* ***órbita*** *de x.*
ii): $G_x := \{g \in G \mid gx = x\} \leq G$ *le llamamos el* ***estabilizador*** *de x*

Decimos que la acción α es ***libre*** *si $G_x = \{e\}$, para todo $x \in X$. Si G actúa sobre X con una acción libre, decimos también que X es un $G-$grupo (o $G-$espacio) libre.*

Se queda como ejercicio al lector verificar que, para todo $x \in X$, G_x es un subgrupo de G y que la relación $\sim$, donde $x \sim y$ si y sólo si $y \in G(x)$, es una relacón de equivalecia.

Definición 13.4.3. *Si X es un $G-$espacio, entonces denotamos al conjunto de órbitas como:*

$$X/G := \{G(x) \mid x \in X\}$$

Si dotamos a X/G con la topología cociente, entonces lo llamaremos ***el espacio de órbitas de*** *X o simplemente* ***espacio orbital****.*

Definición 13.4.4. *Sea X un G-espacio con α, decimos que la acción α es* ***propia****, si para cada $x \in X$ existe una vecindad V de x tal que, para cualesquiera $g, h \in G$ con $g \neq h$, se tiene que $gV \cap hV = \varnothing$, donde*

$$gV := \{gy \mid y \in V\}$$

en este caso, decimos que V es una vecindad pequeña.

Si G actúa sobre X con una acción propia, decimos que X es un $G-$espacio propio.

Observe que toda acción propia es libre: En efecto, sea $x \in X$ y V una vecindad pequeña de x, tenemos que si $g \in G$, entonces $gx \in gV$. Además, si $g \neq e$, como V es pequeña, $gV \cap V = \varnothing$ por lo que $gx \neq x$.

En la literatura matemática, a las acciones propias tambiés se les llama **acciones propiamente discontinuas**.

A continuación daremos las condiciones necesarias y suficientes para que la proyección orbital $p : X \to X/G$ tal que $p(x) = G(x)$ sea cubriente, pero antes necesitamos algunos resultados preliminares.

Lema 13.4.5. *Sea X un $G-$espacio, entonces la proyección orbital $p : X \to X/G$ es una función abierta.*

Demostración. Sea V un subconjunto abierto de X, veamos que $p^{-1}(p(V)) = \bigcup\{gV \mid g \in G\}$, pues si $x \in p^{-1}(p(V))$, entonces $G(x) \in p(V)$, es decir $G(x) = G(v)$ para algún $v \in V$, en particular $x = gv$ para algún $g \in G$, luego $x \in gV \subset \bigcup\{gV \mid g \in G\}$.

Si $x \in \bigcup\{gV \mid g \in G\}$ entonces $x = gv$ para algún $v \in V$ y $g \in G$, luego $p(x) = G(gv) = G(v) \in p(V)$, por lo tanto $x \in p^{-1}(p(V))$.

Como para todo $g \in G$, $g : X \to X$ es un homeomorfismo, entonces gV es abierto en X para todo $g \in G$, de donde $p^{-1}(p(V))$ es abierto en X. Por lo tanto, $p(V)$ es abierto en X/G y p es una función abierta. $\square$

Teorema 13.4.6. *Sea X un $G-$espacio propio, entonces la proyección orbital $p : X \to X/G$ es una proyección cubriente.*

Demostración. Si $x \in X$ y V es una vecindad pequeña de x entonces, como p es un función continua y abierta, $p(V)$ es una vecindad del punto $G(x) \in X/G$ y además,

$$p^{-1}(p(V)) = \bigcup_{g \in G} gV$$

pero como V es pequeña, si $g \neq h$, $gV \cap hV = \varnothing$ por lo que $\bigcup_{g\in G} gV$ es una unión disjunta de abiertos. Además, la función $p|_{gV} : gV \to p(V)$ es continua, abierta y biyectiva, pues para todo $v \in V$, $G(gv) = G(v)$ y si $gv \neq gw$, entonces $v \neq w$, luego $G(v) \neq G(w)$. Pues si $v = gw$ para alguna $g \in G$, entonces $V \cap gV \neq \varnothing$, lo que contradice que la acción sea propia. Por lo tanto $p|_{gV} : gV \to p(V)$ es un homeomorfismo y p es una proyección cubriente. $\square$

Teorema 13.4.7. *Sean G un grupo finito y X un espacio de Hausdorff, si X es un $G-$espacio libre, entonces también es propio.*

Demostración. Como G es un grupo finito, digamos que $G = \{g_0,\ g_1, ..., g_n\}$, entonces si $x \in X$, note que para cualesquiera $g,\ h \in G$, si $g \neq h$ entonces $gx \neq hx$, pues en caso contrario, $h^{-1}gx = x$ contradiciendo que la acción sea libre. De aquí que, como X es de Hausdorff, existen vecindades $U_0,\ U_1, ..., U_n$ de los puntos $g_0x,\ g_1x, ..., g_nx$ respectivamente, tales que $U_i \cap U_j = \varnothing$ para todo $i \neq j$, entonces la intersección

$$V := \bigcap_{i=0}^{n} g_i^{-1} U_i$$

es una vecindad de x tal que $g_jV = g_j \bigcap_{i=o}^{n} g_i^{-1}U_i = \bigcap_{i=o}^{n} g_j g_i^{-1} U_i \subset U_j$, por lo tanto, si $i \neq j$, entonces $g_jV \cap g_kV \subset U_j \cap U_i = \varnothing$. Así, V es la vecindad pequeña de x y por lo tanto la acción de G sobre X es propia. $\square$

Teorema 13.4.8. *Sea X un G-espacio libre, entonces la proyección orbital $p : X \to X/G$ es cubriente si y sólo si X es un $G-$espacio propio.*

Demostración. En el Teorema 13.4.6 ya probamos que si X es un $G-$ espacio propio, entonces p es proyección cubriente.

Supongamos que $p : X \to X/G$ es cubriente. Si $x \in X$, sea U una vecindad de $p(x)$ tal que

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} V_i$$

y tal que la restricción $p|_{V_i} : V_i \to U$ es un homeomorfismo, como $p(x) \in U$, existe una única vecindad V_i tal que $x \in V_i$.

Afirmamos que V_i es una vecindad pequeña de x. Sean $g, h \in G$ con $g \neq h$, si $y \in gV_i \cap hV_i$, entonces $y = gv$ y $y = hw$ donde $v, w \in V_i$, por lo tanto, $v = g^{-1}hw$ y $g^{-1}h \neq e$. Además, $p(w) = p(g^{-1}hw) = p(v)$ pero como $p|_{V_i} : V_i \to U$ es un homeomorfismo, en particular es inyectiva entonces $v = w$, por lo que $v = g^{-1}hv$ lo cual es una contradicción ya que X es libre. De aquí que $gV_i \cap hV_i = \varnothing$ y V_i es una vecindad pequeña de x $\square$

Teorema 13.4.9. *Sea X un G-espacio propio, conexo y localmente conexo por trayectorias, entonces:*

- **i):** *La proyección orbital $p : X \to X/G$ es una proyección cubriente normal.*
- **ii):** *G es isomorfo al grupo de deslizamientos de $p : X \to X/G$*
- **iii):** *G es isomorfo al cociente $\pi(X/G)/p_*(\pi(X))$*

Demostración. Por los Teoremas 13.4.6 y 13.3.3, es suficiente probar que G es isomorfo a $D(p)$ y que p es una proyección normal.

Definamos $\varphi : G \to D(p)$ tal que $\varphi(g)(x) := g(x) = gx$.

Veamos que $\varphi(g)$ es un deslizamiento: Si $g \in G$ entonces, para todo $x \in X$, tenemos que $p \circ \varphi(g)(x) = p(gx) = p(x)$, por lo que $p \circ \varphi(g) = p$. Es fácil ver que $\varphi(g)$ es biyección. Así, para todo $g \in G$, $\varphi(g) \in D(p)$.

Verifiquemos que φ es un isomorfismo de grupos: Sean $g, h \in G$ y $x \in X$, entonces $\varphi(g * h)(x) = g * h(x) = g(h(x)) = g \circ h(x)$, por lo tanto $\varphi(g * h) = \varphi(g) \circ \varphi(h)$ de donde φ es un homomorfismo.

Notemos que φ es un monomorfismo, pues como la acción es propia, por lo mencionado anteriormente, para todo par $g, h \in G$, si $g \neq h$ entonces, para todo $x \in X$, $gx \neq hx$. Para probar que φ es un epimorfismo, sea $h \in D(p)$ tal que $h(x_1) = x_2$, con $x_1, x_2 \in X$, como $p \circ h = p$, entonces $G(x_1) = G(x_2)$, por lo tanto existe $g \in G$ tal que $gx_1 = x_2$. De aquí que $\varphi(g)$ y h son dos levantamientos de p que coinciden en x_1, por el Teorema

13.1.5 $\varphi(g) = h$. De aquí que φ es un isomorfismo. Además, si $p(x_1) = p(x_2)$, entonces $G(x_1) = G(x_2)$, por lo que existe $g \in G$ tal que $gx_1 = x_2$, de donde $\varphi(g)(x_1) = x_2$, como $\varphi(g) \in D(p)$, tenemos que p es normal. $\square$

Corolario 13.4.10. *Sean X un $G-$espacio propio, simplemente conexo y localmente conexo por trayectorias y $p : X \to X/G$ la proyección orbital, entonces $\pi(X/G)$ es isomorfo a G.*

Teorema 13.4.11. *Sea $p : \widetilde{X} \to X$ una proyección cubriente, si $\widetilde{X}$ es conexo y localmente conexo por trayectorias, entonces $D(p) \curvearrowright_\alpha \widetilde{X}$, donde $\alpha : D(p) \times \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ es tal que $\alpha(h, \widetilde{x}) = h(\widetilde{x})$. En este caso, la acción α es propia.*

Demostración. Por como se definió α, es claro que si $g, h \in D(p)$, entonces $g \circ h(\widetilde{x}) = g(hx)$, además, para todo $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$, $Id(\widetilde{x}) = \widetilde{x}$.

Veamos que la acción es propia. Sean $a \in \widetilde{X}$ y U una vecindad admisible del punto $p(a) \in X$, como $\widetilde{X}$ es localente conexo por trayectorias (y por lo tanto también lo es X), podemos suponer que U es conexa por trayectorias, entonces

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} V_i$$

donde los V_i son las componentes de conexas por trayectorias de $p^{-1}(U)$. Sea V_k la componente que contiene al punto a, afirmamos que V_k es la vecindad pequeña de a. En efecto, si $h, g \in D(p)$ con $h \neq g$ entonces $h(a) \neq g(a)$ pues si dos deslizamientos coinciden en un punto, entonces son iguales.

Tenemos entonces que $h(V_k) \cap g(V_k) = \varnothing$ pues, como $ph(a) = p(a) = p \circ g(a)$, entonces $h(a) \in V_i$ y $g(a) \in V_j$ con $i \neq j$. tenemos que $h(V_k)$ es conexo, pues V_k lo es, además $h(V_k) \cap V_i \neq \varnothing$, pero como V_i es componente de conexidad, tenemos que $h(V_k) \subset V_i$. Análogamente, $g(V_k) \subset V_j$. Luego, $h(V_k) \cap g(V_k) \subset V_i \cap V_j = \varnothing$. De donde la acción es propia. $\square$

Note que si $p : \widetilde{X} \to X$ es una proyección cubriente y $D(p) \curvearrowright_\alpha \widetilde{X}$ con α como en el teorema anterior, entonces para toda $g \in D(p)$ se cumple que $p \circ g = p$, es decir, para toda $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$, $p(\widetilde{x}) = p(g\widetilde{x})$.

De aquí concliumos que $p : \widetilde{X} \to X$ es constante en las fibras de la proyección orbital $\pi : \widetilde{X} \to \widetilde{X}/D(p)$. Por lo tanto, por el Teorema de Transgreción, existe $p' : \widetilde{X}/D(p) \to X$ tal que $p' \circ \pi = p$:

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "p"] & \\ \frac{\widetilde{X}}{D(p)} \arrow[r, "p'"'] & X \end{tikzcd}$$

Eso nos lleva al siguiente Teorema:

Teorema 13.4.12. *Sean $\widetilde{X}$ es conexo y localmente conexo por trayectorias y $p : \widetilde{X} \to X$ es una proyección cubriente normal, entonces la función $p' : \widetilde{X}/D(p) \to X$ del diagrama anterior es un homeomorfismo.*

Demostración. Tenemos que p es una funcion abierta (Proposición 13.0.5). Luego, si U es un subconjunto abierto de $\widetilde{X}/D(p)$, entonces $p'(U) = p(\pi^{-1}(U))$ es abierto, por lo que p' es una función abierta.

Por otro lado, como $p = p' \circ \pi$ es suprayectiva, entonces p' lo es. Además, si $\pi(\widetilde{x}), \pi(\widetilde{y}) \in \widetilde{X}/D(p)$ son tales que $p'(\pi(\widetilde{x})) = p'(\pi(\widetilde{y}))$, entonces $p(\widetilde{x}) = p(\widetilde{y})$, pero como p es normal, tenemos que existe $g \in D(p)$ tal que $\widetilde{x} = g(\widetilde{y})$, es decir, $\pi(\widetilde{x}) = \pi(\widetilde{y})$, por lo que p' también es inyectiva. De aquí que p' es biyectiva, por lo tanto, como p' continua y abierta, entonces es un homeomorfismo.

$\square$

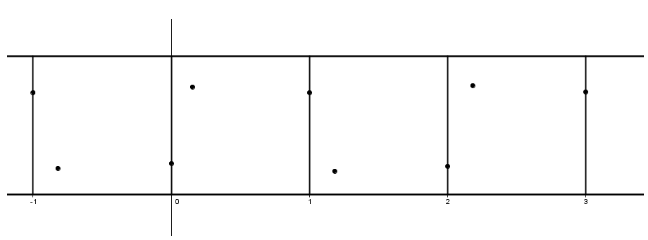
Ejemplos

Ejemplo 13.4.1. La banda de Möbius.

Sea $X = \mathbb{R} \times [0,1] \subset \mathbb{C}$, $G = \mathbb{Z}$ Sea $\phi : X \to X$ definida por la fórmula $\phi(z) = \overline{z} + 1 + i$ $\phi^{-1} = \overline{z} - 1 + i$

Definimos la acción $G \curvearrowright X$ por la fórmula $n * z = \phi^n(z)$ $G = \mathbb{Z}$

El espacio de órbitas $X/\mathbb{Z}$ es homeomorfo a la banda de Möbius $\mathbb{M}^2$. Por lo tanto $\pi(\mathbb{M}^2) = \pi(X/\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ el grupo que actúa propiamente en X.



Ejercicio: Verificar que la acción descrita en el ejemplo anterior, $\mathbb{Z} \curvearrowright X$ es propia.

Ejemplo 13.4.2. El espacio proyectivo $\mathbb{R}P^n$.

Sea $\mathbb{Z}_2 \curvearrowright \mathbb{S}^n$ la acción antipodal. Entonces $\mathbb{R}P^n$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^n/\mathbb{Z}_2$. Consecuentemente, $\pi(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}_2$ para $n \geq 2$.

$\mathbb{R}P^1 = \mathbb{S}^1$ entonces $\pi(\mathbb{R}P^1) = \mathbb{Z}$

Ejemplo 13.4.3. El espacio de lentes (lenticular).

Sea $\mathbb{S}^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : \|(z_1, z_2)\| = 1\}$, para cada par p, q de números enteros primos relativos, definimos la función $h : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$, como $h(z_1, z_2) = (z_1 e^{2\pi i/p}, z_2 e^{2\pi i q/p})$.

La función h induce una acción propia de $\mathbb{Z}_p$ en $\mathbb{S}^3$ dada por:

$$\mathbb{Z}_p \curvearrowright \mathbb{S}^3 \qquad n * x = h^n(x)$$

Definimos $L(p,q) = \mathbb{S}^3/\mathbb{Z}_p$ por lo tanto $\pi(L(p,q)) = \mathbb{Z}_p$. Al espacio $L(p,q)$ se le conoce como *el espacio lenticular o espacio lente*.

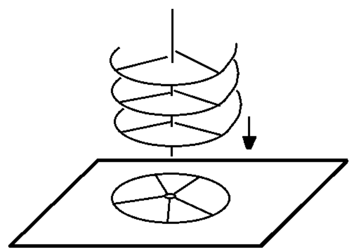
Ejemplo 13.4.4. Superficie de Riemann.

Sean p y q las funciones definidas de la siguiente forma:

$$\mathbb{X} \times (0,\infty) \xrightarrow{p} \mathbb{S}^1 \times (0,\infty) \xrightarrow{q} \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$(x,t) \longmapsto (e^{2\pi i x}, t) \longmapsto t e^{2\pi i x}$$

La función $h := q \circ p$ es una proyección cubriente de infinitas hojas sobre el plano complejo agujerado.



Ejemplo 13.4.5. El toro $\mathbb{T}^2$.

Sea $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \qquad X = \mathbb{R}^2$

Sea la acción $G \curvearrowright X$ definida por la fórmula:

$$(n, m) * (x, y) = (x + n, y + m)$$

Esta acción es propia y $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ es homeomorfo a $\mathbb{T}^2$. Por lo tanto, $\pi(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

Índice alfabético

base, 39

cerradura, 34
Cilindro, 67
conjunto
- abierto, 27
- cerrado, 32
- denso, 38
- separable, 38

encaje
- topológico, 66

espacio
- producto, 66

espacios
- topológicos, 27

función
- abierta, 61
- cerrada, 61
- continua, 57
  - en un punto, 57

homeomorfismo, 63

interior, 30
invariante topológico, 65

numerable
- primero, 47
- segundo, 47

producto
- cartesiano, 67
- coordenada, 67
- diagonal, 75
- directo de funciones, 76
- topológico, 68
- Tychonoff, 68

proyección, 68
punto
- adherencia, 34
- cerradura, 34
- frontera, 37
- interior, 30

separa
- puntos, 75
- puntos de cerrados, 75

subbase, 44

tipo topológico, 65
topología, 27
- antidiscreta o trivial, 28
- cofinita, 28
- comparación, 29
- conumerable, 29
- de cajas, 67
- discreta, 28
- Línea de Sorgenfrey, 42
- plano digital, 42
- producto, 66, 68
- recta digital, 42
- Tychonoff, 68

Toro, 67

vecindad
- de un punto, 30